

Obrada signala u vremensko-frekvencijskoj domeni



Doc. dr. sc. Damir Seršić
<http://ts.zesoi.fer.hr>

Vremensko-frekvencijske obrade

- Pod pojmom *spektar signala* redovito se podrazumijeva Fourierov spektar.
- Spektar snage slučajnih procesa također je definiran korištenjem Fourierove transformacije.
- Fourierov spektar je mjera izrazito prilagođena signalima nepromjenjivih svojstava, odnosno stacionarnim slučajnim procesima.

Fourierova transformacija

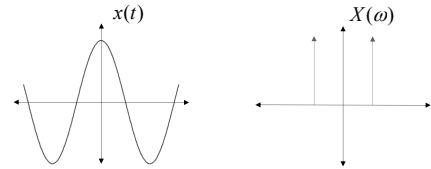
- Definicija:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{x(t)}_{\text{signal}} \underbrace{e^{-j\omega t}}_{\substack{\text{kompleksna} \\ \text{harmonijska} \\ \text{funkcija}}} dt = X(\omega)$$

- $X(\omega)$ možemo promatrati kao mjeru sličnosti između $x(t)$ i $e^{-j\omega t}$.
- Ako je analizirana funkcija $x(t)$ harmonijska funkcija, sličnost će biti velika.

Fourierova transformacija

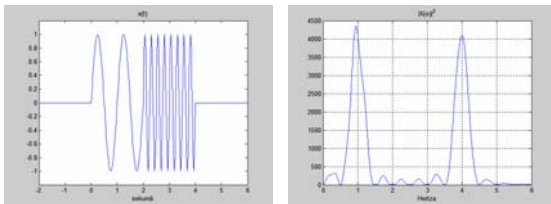
- Transformacija harmonijskog signala:



- Idealna lokalizacija u frekvencijskoj domeni.

Primjer promjenjivog signala

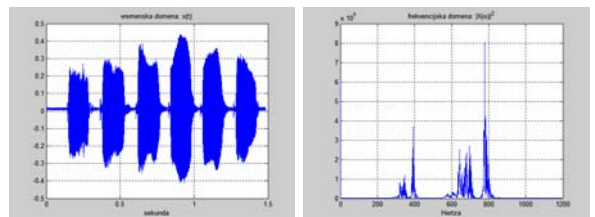
- Konstruirajmo signal promjenjivih svojstava u vremenskoj i frekvencijskoj domeni: dva sinusa.



- Vide se ili vremenski ili frekvencijski odnosi – niti jedan prikaz nije idealan.

Primjer stvarnog signala

- Akustički signal prikazan u dvije domene.
- Teško možemo prepoznati o čemu je riječ.



Diskretna Fourierova transformacija

- Diskretizacija vremena i/ili frekvencije:

$$t = mT \quad \omega = n\Omega$$

$$X(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[mT] e^{-j\omega mT} \quad X[n\Omega] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-jn\Omega t} dt$$

FT diskretnih signala koefficienti Fourierovog reda

$$t = mT, \quad \omega = n\Omega$$

$$X[n\Omega] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[mT] e^{-jn\Omega mT}$$

Diskretna Fourierova transformacija

- U svim slučajevima: linearna podjela (kvantizacija) vremenske i/ili frekvencijske osi.

Glazbena ljestvica

- Logaritamska podjela frekvencijske osi:
 - oktava – raspon od f_c do $2f_c$
 - ljestvica od 12 polutonova unutar jedne oktave
 - c, cis, d, dis, e, f, fis, g, gis, a, ais, h
 - $f_{cis} = \sqrt[12]{2} f_c, \quad f_d = \sqrt[12]{2} f_{cis}, \dots$
- Raspon 220 – 440 Hz je isto što i 440 – 880 Hz ili 7040 – 14080 Hz: jedna glazbena oktava.
- Ljudsko uho bolje razlučuje NF od VF.
- Slično važi i za doživljaj slike.

Motivacija za T-F analizu

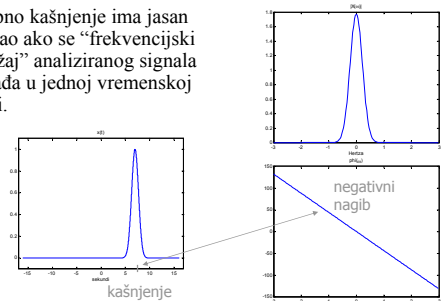
- Vremenski odnosi su ugrađeni u frekvencijsku karakteristiku, ali nisu uvijek eksplicitno vidljivi.
- Poznata mjera, koja se dobiva iz fazne karakteristike je grupno kašnjenje:

$$X(\omega) = A(\omega) e^{j\phi(\omega)}, \quad T(\omega) = -\frac{d\phi(\omega)}{d\omega}$$

Grupno kašnjenje

$$T(\omega) = -\frac{d\phi(\omega)}{d\omega}$$

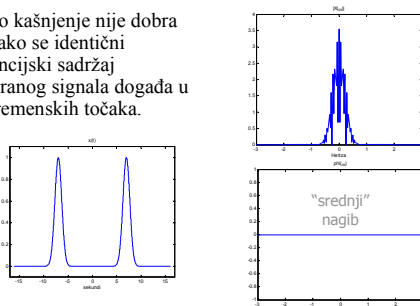
- Grupno kašnjenje ima jasan smisao ako se “frekvencijski sadržaj” analiziranog signala događa u jednoj vremenskoj točki.



Grupno kašnjenje

$$T(\omega) = -\frac{d\phi(\omega)}{d\omega}$$

- Grupno kašnjenje nije dobra mjera ako se identični frekvencijski sadržaj analiziranog signala događa u više vremenskih točaka.



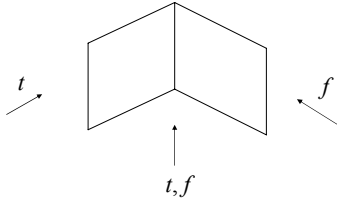
Trenutna frekvencija

- Analogna mjera za kompleksne signale u vremenskoj domeni je trenutna frekvencija:

$$x(t) = a(t) e^{j\phi(t)}, \quad f(t) = \frac{d\phi(t)}{dt}$$

- Njezin je smisao također upitan ako u identičnoj vremenskoj točki postoji više od jedne frekvencije u signalu.

Vremensko-frekvencijski prikaz



- Htjeli bismo konstruirati takvu transformaciju da istovremeno opažamo vremenske i frekvencijske odnose, s linearnim ili logaritamskim osima.

FT na vremenskom otvoru - STFT

- Konstruirajmo transformaciju s dobrim svojstvima lokalizacije u obadvojbe domene.
- Umjesto $e^{j\omega t} \rightarrow g(t-\tau) e^{j\omega t}$
- $g(t)$ – lokalni analizirajući otvor željenih svojstava u obje domene, τ – pomak.
- Rezultat: STFT.

$$X(\tau, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)g(t-\tau) e^{-j\omega t} dt$$

STFT

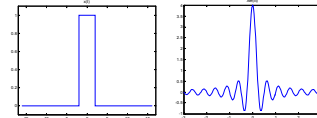
$$X(\tau, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)g(t-\tau) e^{-j\omega t} dt$$

- Rezultat $X(\tau, \omega)$ očito:
 - ima dimenziju više od dimenzije signala,
 - ovisi o odabranom vremenskom otvoru.
- Funkcije razlaganja čine neprebrojiv i redundantan skup (po τ i ω):

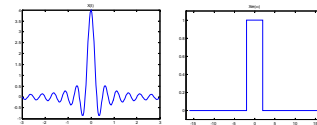
$$\{g(t-\tau) e^{j\omega t}\}$$

Izbor otvora

- Pravokutni u vremenu

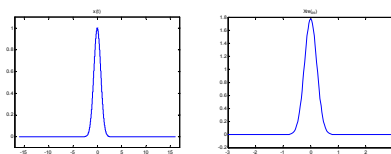


- Pravokutni u frekvenciji

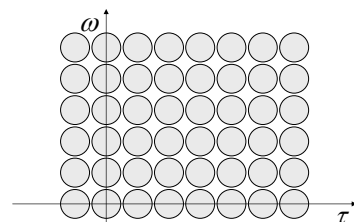


Izbor otvora

- Idealna lokalizacija u jednoj domeni uzrokuje lošu lokalizaciju u drugoj.
- Najmanji produkt efektivnih širina daje Gaussov otvor.

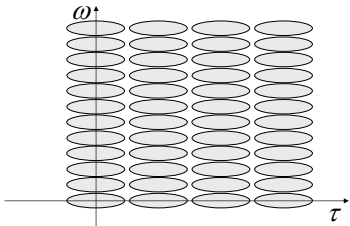


Razlučivost u T-F ravnini



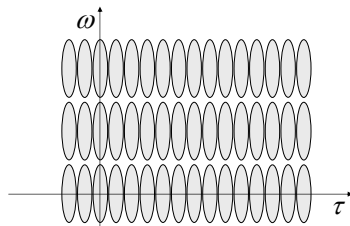
- Središta elipsi predstavljaju centre funkcija razlaganja (τ , ω), a dimenzije efektivne širine.
- Svojstva, odnosno geometrija funkcija razlaganja u T-F ravnini je konstantna.

Razlučivost u T-F ravnini



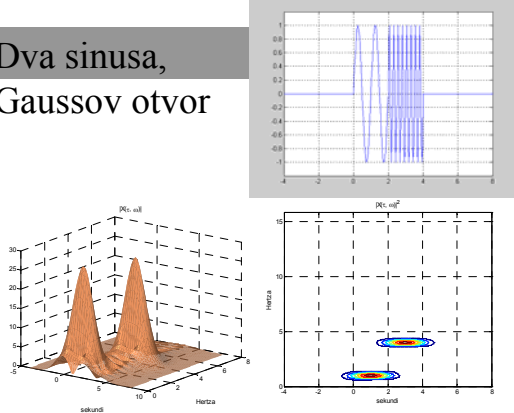
- Smanjenje efektivne širine u jednoj domeni (povećanje rezolucije) dovodi do povećanja u drugoj (smanjenje rezolucije).

Razlučivost u T-F ravnini

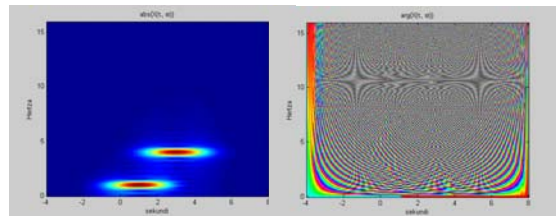


- Smanjenje efektivne širine u jednoj domeni (povećanje rezolucije) dovodi do povećanja u drugoj (smanjenje rezolucije).

Dva sinusa, Gaussov otvor

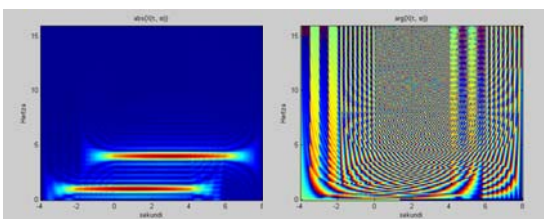


Dva sinusa, Gaussov otvor



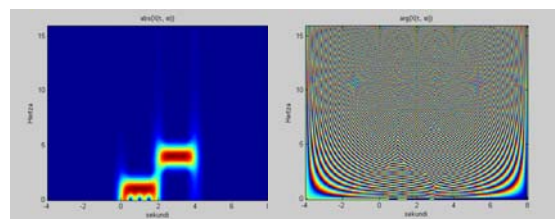
- Lijevo: amplituda, desno faza

Dva sinusa, širi Gaussov otvor



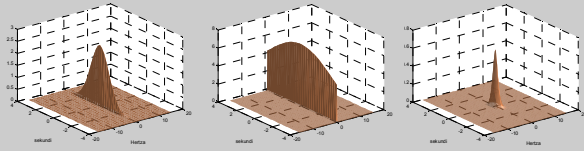
- Veća neodređenost u vremenu, manja u frekvenciji.

Dva sinusa, uži Gaussov otvor



- Veća neodređenost u frekvenciji, manja u vremenu.

Pripadni analizirajući otvori



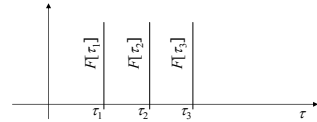
- 2D funkcija koja ilustrira razlučivost korištenih otvora računa se kao $G_{2D}(t, w) = g(t) \cdot |G(w)|$.

Postupak računanja STFT

- A) Kao niz Fourierovih transformacija za različite vremenske pomake τ :

$$X(\tau, \omega) = \int_t [x(t)g^*(t - \tau)] e^{-j\omega t} dt,$$

$$X(\tau, \omega) = \text{Fourier}[x(t)g^*(t - \tau)].$$



Postupak računanja STFT

- B) Kao slog filtracija za različite frekvencijske pomake ω :

$$X(\tau, \omega) = \int_t [x(t) \cdot e^{-j\omega t}] g^*(t - \tau) dt.$$

- Za $\omega = 0$ važi:

$$X(\tau, 0) = \int_t x(t) g^*[-(\tau - t)] dt.$$

- Dobiveni izraz predstavlja konvolucijski integral funkcija $x(t)$ i $g^*(-t)$.

Postupak računanja STFT

- Konvolucija $x(t)$ i $g^*(-t)$ odgovara filtriranju:

$$x \rightarrow [G^*(-\omega)] \rightarrow X(\tau, 0)$$

- Za $\omega \neq 0$ imamo:

$$X(\tau, \omega) = \int_t [x(t) \cdot e^{-j\omega t}] g^*[-(\tau - t)] dt.$$

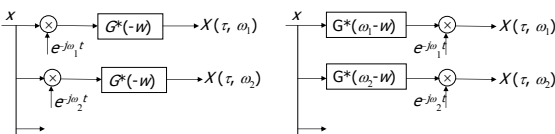
- što možemo prikazati kao:

$$x \xrightarrow{e^{-j\omega t}} \otimes \rightarrow [G^*(-\omega)] \rightarrow X(\tau, \omega)$$

- Množenju sa $e^{-j\omega t}$ odgovara pomak u Fourierovoj domeni: $X(w + \omega)$.

STFT kao slog filtara

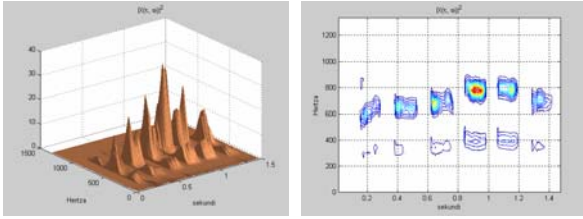
- Jednostavnom supstitucijom frekvencijski pomak signala možemo nadomjestiti frekvencijskim pomakom filtra.
- Konačno, STFT možemo računati slogom ekvidistantnih filtara:



Spektrogram

- Koristimo linearni (ekvidistantni) filterski slog – jer je i širina analizirajućih $G^*(\omega - \omega_n)$ konstantna.
- $|X(\tau, \omega)|$ ili $|X(\tau, \omega)|^2$ naziva se spektrogramom.
- Prvi pokušaji analize govora elektromehaničkim spektrometrom iz 1930.g (slog BP filtra, lampice, fotosjetljivi papir).

STFT spektrogram stvarnog signala



- Analizirani fenomen lokaliziran u obje domene.
- Rezultat ovisi i o signalu i o analizirajućem otvoru.
- Otvor ima konstantna svojstva na T-F ravnini, zadanu rezoluciju - kompromis između vremena i frekvencije.

STFT spektar snage slučajnog procesa

$$S_{XX}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[|X_T(\omega)|^2]}{2T}$$

- Spektar snage SP je mjera usrednjena u vremenu.
- $X_T(t)$ zamijenimo produktom $X(t)g(t-\tau)$ i izračunamo spektrogram kao funkciju τ i ω : $|X(\tau, \omega)|^2$.
- STFT spektar snage slučajnog procesa dobivamo primjenom operatora očekivanja (a bez vremenskog usrednjavanja):

$$S_{XX}(\tau, \omega) = E[|X(\tau, \omega)|^2].$$

- Rezultat: STFT spektar prati svojstva nestacionarnog procesa.

Problem inverzije STFT

- Fourierov transformacijski par:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} dt$$

- Postojanje inverzne formule jamči da nije došlo do gubitka informacije.
- Fourierova transformacija nije redundantna (ortogonalna je) i čuva energiju signala (uniformna).
- Postoji li inverzna STFT? Za koje vremenske otvore?

Inverzna STFT

- STFT jednodimenzionalnog signala je ploha $X(\tau, \omega)$: razlaganje je redundantno!

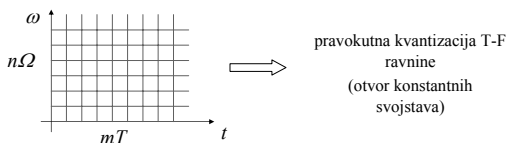
$$x(t) = \frac{1}{2\pi \|g\|^2} \iint_{\tau, \omega} X(\tau, \omega) g(t-\tau) e^{j\omega t} d\omega d\tau;$$

- Inverzija je moguća, ako je norma odabranog otvora $\|g\|$ različita od nule.
- Svaki $g(t)$ konačne energije je dobar!
- Poželjan izbor $\|g\|=1$, uz dobra lokalizacijska svojstva u vremenu i frekvenciji.

Diskretizacija STFT

- Umjesto na čitavoj plohi, STFT računamo na diskretnom skupu točaka.

$$g_{m,n}(t) = g\left(t - \underbrace{mT}_{\text{vremenski pomak}}\right) \underbrace{e^{jn\Omega t}}_{\text{frekvencijski pomak}} \quad X[m, n] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) g_{m,n}(t) dt$$



Diskretizacija STFT

- Da li je razlaganje bez gubitka informacije, odnosno da li se iz diskretnog skupa koeficijenata $X[m, n]$ može restaurirati analizirani signal $x(t)$?

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[m, n] \cdot g_{m,n}(t)$$

- Rekonstrukcijska (inverzna) formula poznata je pod nazivom Gaborova ekspanzija signala.
- $X[m, n]$ je mjera sadržaja $x(t)$ na lokaciji $mT, n\Omega$.
- Kada je moguća rekonstrukcija?

Potrebna svojstva

- Signal konačne energije mora se preslikati u spektar konačne energije (ne nužno iste).

– Energija signala:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

– Energija spektra:

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X[m, k]|^2$$

– Uvjet vodi na formulaciju:

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X[m, k]|^2 \leq B \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

B je neka pozitivna konstanta

Potrebna svojstva

- Inverzna transformacija mora spektar konačne energije vratiti u signal konačne energije.

– Uvjet vodi na formulaciju:

$$A \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \leq \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X[m, k]|^2$$

A je neka pozitivna konstanta

– Oba uvjeta zajedno:

$$A \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \leq \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X[m, k]|^2 \leq B \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt,$$

$$0 < A \leq B < \infty.$$

Dovoljan uvjet

- Rekonstrukcija je moguća i to na numerički stabilan način ako postoje dvije konstante A i B za koje vrijedi:

$$A \underbrace{\|x\|^2}_{\text{energija signala}} \leq \underbrace{\sum_{m,k} \|X[m, k]\|^2}_{\text{energija koeficijenta}} \leq B \underbrace{\|x\|^2}_{\text{energija signala}}$$

$$0 < A \leq B < \infty$$

- Razlaganje može biti i redundantno ili neuniformno, a konstante A i B zadaju energetski okvir transformacije (*engl. frame*).

Dovoljan uvjet

- Kako u konkretnom slučaju Gaborove ekspanzije pronaći zadovoljavajuće funkcije razlaganja

$$\{g_{m,k}(t)\}?$$

- Teoriju okvira (*eng. frame theory*) za slučaj GE, odnosno diskretne STFT, izučavali su Weyl, Heisenberg, Gabor i mnogi drugi.
- Jedan od najvažnijih rezultata je teorem otipkavanja.

Nužan uvjet rekonstrukcije

- $T\Omega > 2\pi$ podotipkavanje
 - rekonstrukcija nije moguća.
- $T\Omega = 2\pi$ granični (kritični) slučaj
 - moguća rekonstrukcija,
 - ne mogu se postići dobra svojstva u obje domene.
- $T\Omega < 2\pi$ nadotipkavanje
 - moguća rekonstrukcija,
 - redundantno razlaganje,
 - mogu se postići dobra svojstva u obje domene.

Motivacija za nejednoliku razlučivost

- Razlučivost razlaganja je kod STFT-a određena svojstvima vremenskog otvora.
- Odabrani kompromis uslijed principa neodređenosti vrijedi za cijelu T-F ravninu.
- Često jedna vremenska točka analiziranog signala ima složen frekvencijski sadržaj.
- Za takve signale bi odgovarala analiza koja nema konstantnu rezoluciju.
- U tom slučaju bi ukupno određenje složenog signala moglo biti preciznije od određenja u jednoj točki T-F ravnine.

Wavelet transformacija

- Wavelet funkcija ("valić") $\psi^{a,\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right)$

$\Psi(t)$ – mother wavelet (prototip wavelet funkcije)

τ – vremenski linearni pomak

a – skala

$$\frac{1}{\sqrt{|a|}} \text{ – zbog normizacije } (\|\psi^{a,\tau}\| = \|\psi\|)$$

Wavelet transformacija

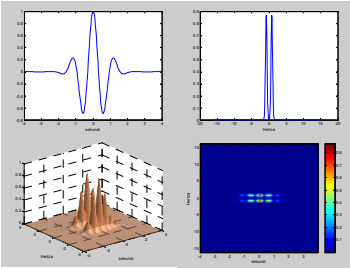
- Kontinuirana wavelet transformacija (CWT):

$$X(\tau, a) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right) dt$$

- Funkcija razlaganja nije ograničena samo na kompleksnu harmonijsku funkciju $e^{j\omega t}$.
- "Valić" $\psi(t)$ osigurava željena svojstva razlaganja.
- Analizirajuću funkciju pomičemo za τ , stežemo ili rastežemo za skalu a i uspoređujemo sa $x(t)$.

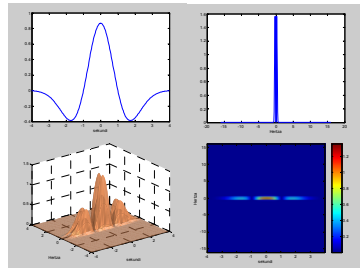
Primjeri wavelet funkcija

- Morlett: $\psi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \cos 5t$

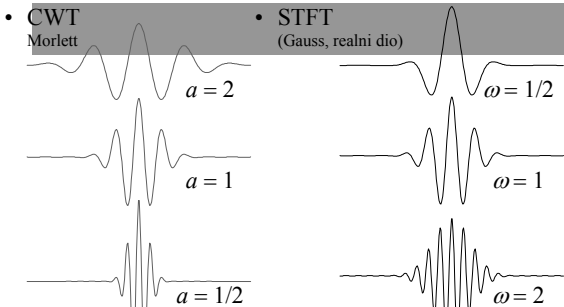


Primjeri wavelet funkcija

- Sombbrero: $\psi(t) = C(1-t^2)e^{-\frac{t^2}{2}}$



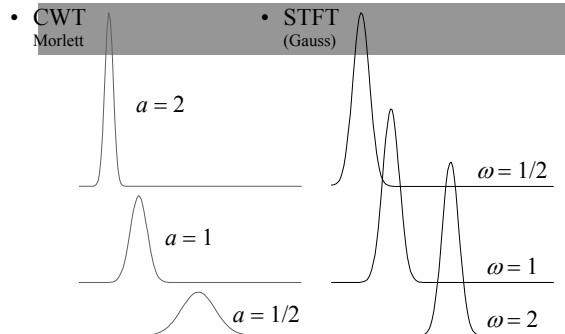
Usporedba CWT-STFT u T domeni



• Širina otvora se mijenja, broj valića isti.

• Širina otvora konstantna, broj valića se mijenja.

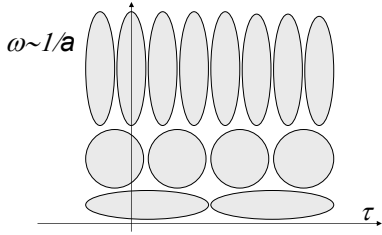
Usporedba CWT-STFT u F domeni



• Širina otvora se mijenja, produkt $\Delta_t \Delta_f$ je konstantan.

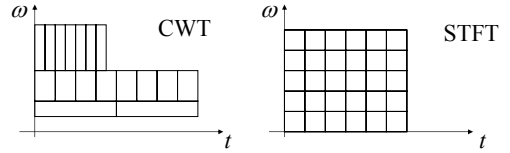
• Širina otvora konstantna.

Razlučivost u T-F ravnini



- Središta elipsi predstavljaju centre funkcija razlaganja (τ , $\omega \sim 1/a$), a dimenzije efektivne širine.
- Svojstva, odnosno geometrija funkcija razlaganja u T-F ravnini je promjenjiva!!

Rezolucije u T-F ravnini

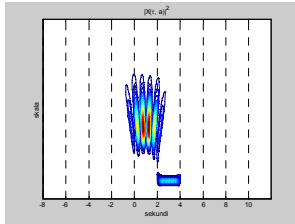
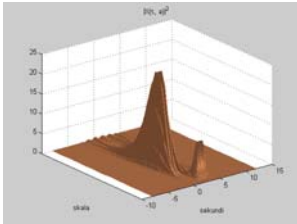


- STFT: konstantna rezolucija na cijeloj T-F ravnini
- CWT:
 - povećana rezolucija u frekvencijskoj domeni za NF,
 - povećana rezolucija u vremenskoj domeni za VF.

CWT na primjeru

- Analizirani signal: dva sinusa, Morletov wavelet.

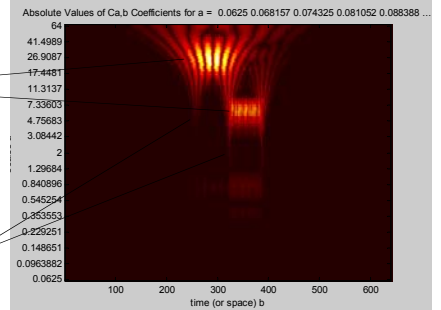
$$\psi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \cos(5t)$$



CWT na primjeru

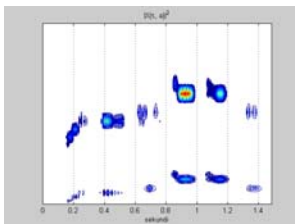
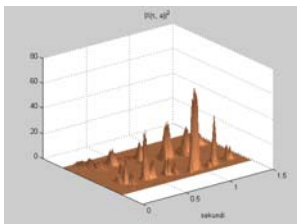
lokalizacija u frekvenciji bolja za NF

Vrlo precizna lokalizacija u vremenu

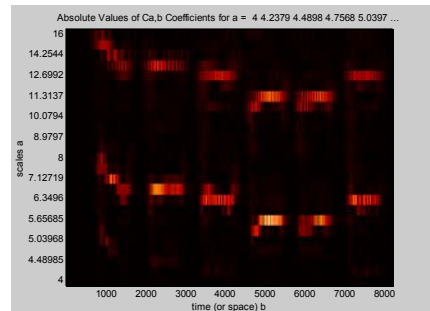


CWT na realnom primjeru

- Akustički signal, Morletov wavelet



CWT na realnom primjeru: gotovo "notni zapis"



Skalogram slučajnog procesa

- Mjeru $|X(\tau, a)|^2$ nazivamo skalogram.
- Skalogram slučajnog procesa dobivamo primjenom operatora očekivanja:

$$S_{xx}(\tau, a) = E[|X(\tau, a)|^2].$$

- Rezultat: skalogram prati svojstva nestacionarnog procesa, uz dobra svojstva wavelet transformacije.

Inverzna CWT

$$x(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2} X(\tau, a) \psi^{a,\tau}(t) da dt$$

$$C_\psi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\psi(\omega)|^2}{\omega} d\omega$$

uvjet $C_\psi < \infty$ - uvjet prihvatljivosti

- Inverzija postoji ako je zadovoljen uvjet prihvatljivosti (*engl. admissibility condition*).
- Nužan uvjet $\Psi(0) = 0$: $\psi(t)$ ne smije sadržavati istosmjernu komponentu.

Postupak računanja CWT

- Kao slog filtracija za različite skale a :

$$X(\tau, a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \psi^* \left[-\frac{1}{a}(\tau - t) \right] dt,$$

- Za $a = 1$ važi:

$$X(\tau, a) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \psi^* [-(\tau - t)] dt,$$

- Dobiveni izraz predstavlja konvolucijski integral funkcija $x(t)$ i $\psi^*(-t)$.

Postupak računanja CWT

- Konvolucija $x(t)$ i $\psi^*(-t)$ odgovara pojasnopropusnom filtriranju:

$$x \rightarrow \boxed{\psi^*(-\omega)} \rightarrow X(\tau, 1)$$

- Za $a \neq 1$ imamo:

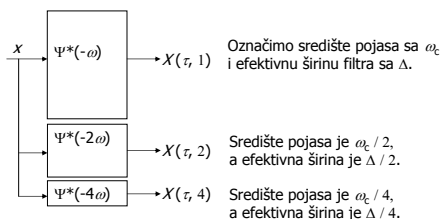
$$X(\tau, a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \psi^* \left[-\frac{1}{a}(\tau - t) \right] dt,$$

$$x \rightarrow \boxed{\psi^*(-a\omega)} \rightarrow X(\tau, a)$$

- Pojasnopropusni filter je promijenjene širine i središnje frekvencije.

CWT kao slog filtara

- Neka je $a = 1, 2, 4, \dots$
- CWT možemo računati slogom nejednakih filtara:



Diskretna WT

- $a = a_0^m$ - logaritamska podjela u skali (frekvenciji)
- $\tau = nT_0 a$ - pomak usklađen s iznosom skale
- tj. $\tau = nT_0 a_0^m$

Sve zajedno $\psi_{m,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{a_0^m}} \psi \left(\frac{t}{a_0^m} - nT_0 \right)$

DWT $X[m, n] = \frac{1}{\sqrt{a_0^m}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \psi \left(\frac{t}{a_0^m} - nT_0 \right) dt$

Uvjet rekonstrukcije

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X[m, n] \cdot \psi_{m, n}(t)$$

- Rekonstrukcija je moguća i to na numerički stabilan način ako postoje dvije konstante A i B za koje vrijedi:

$$A \underbrace{\|x\|^2}_{\text{energija signala}} \leq \underbrace{\sum_{m, n} \|X[m, n]\|^2}_{\text{energija koeficijenata}} \leq B \underbrace{\|x\|^2}_{\text{energija signala}}$$

$$0 < A \leq B < \infty$$

- Kod DWT-a ne postoji ekvivalent nužnog uvjeta $T\Omega \leq 2\pi$, koji je vrijedio za Gaborovu ekspanziju.

Oktavna DWT

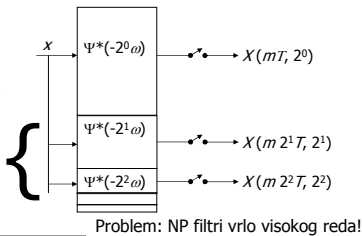
- Kod waveleta se lako mogu pronaći ortogonalne baze s dobrim lokalizirajućim svojstvima u obje domene (što nije bio slučaj s Gaborom).
- Za realizaciju čest izbor je $a_0 = 2$ tj. oktavna podjela frekvencijske skale.
- Prednost: mogućnost brze realizacije filterskim slogovima.

$$\psi_{m, n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^m}} \psi\left(\frac{t}{2^m} - nT_0\right)$$

Oktavna DWT kao slog filtera

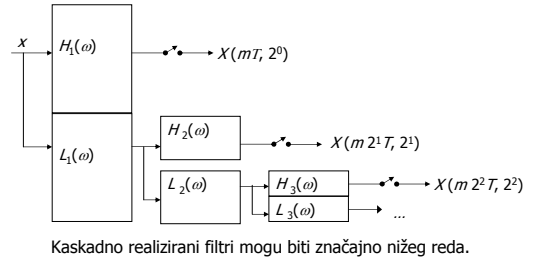
- Ponovno prikažimo CWT filterski slog. Označimo $a = 2^0, 2^1, 2^2, \dots$ i otipkamo uzorke rezultata.

- Zbrojena širina svih filtera $j > k$ jednaka je širini k -tog filtera.



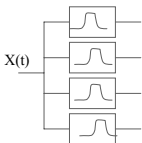
Oktavna DWT kao slog filtera

- Ideja za rekurzivnu realizaciju



Realizacija filterskim slogovima

Kod STFT-a lako smo dobili ekvivalenciju s ekvidistantnim filtrom:



Kod waveleta ($a_0=2$) imat ćemo binarno stablo:

