

Teorija signala

Doc. dr. Damir Seršić
<http://ts.zesoi.fer.hr>

Teme predavanja

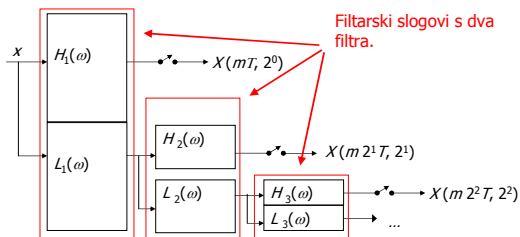
- Wavelet filterski slogovi
- Wavelet funkcija i funkcija skale
- Brza oktavna DWT
- Analiza signala DWT slogom
 - Frekvencijska analiza
 - Detekcija diskontinuiteta
 - Poništavanje polinoma
- Potiskivanje šuma metodom praga i druge primjene.

Wavelet filterski slogovi

- Naučili smo projektirati biortogonalne i ortogonalne maksimalno decimirane filterske slogove s potpunom rekonstrukcijom.
- Pitanje: mogu li se takvi slogovi iskoristiti za realizaciju oktavne DWT vremenski diskretnih signala?

Oktavna DWT kao slog filtera

Rekurzivna realizacija

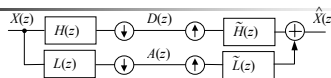


Filterski slog s dva pojasa



- Potpuna rekonstrukcija: $\hat{X}(z) = z^{-A} X(z)$
- Uvjeti: $\tilde{L}(z)L(z) + \tilde{H}(z)H(z) = z^{-A}$,

Filterski slog s dva pojasa

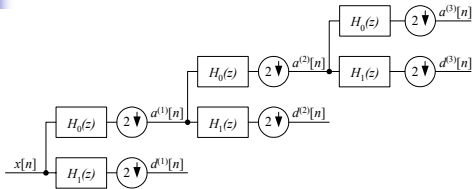


- Potpuna rekonstrukcija: $\hat{X}(z) = z^{-A} X(z)$
- Uvjeti: $\tilde{L}(z)L(z) + \tilde{H}(z)H(z) = 2z^{-A}$,
- $\tilde{L}(z)L(-z) + \tilde{H}(z)H(-z) = 0$.

Biortogonalna rješenja (Vetterli 86)

- različiti filteri na strani razlaganja i rekonstrukcije:
 - a, b, c \rightarrow $p, -q, r, -s, t$ $\hat{H}(z) = L(-z)$
 - p, q, r, s, t \rightarrow $-a, b, -c$ $\tilde{L}(z) = -H(-z)$

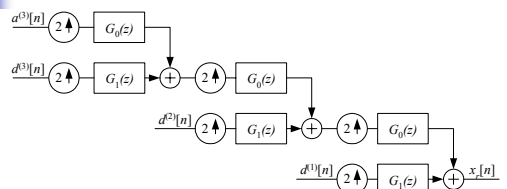
Wavelet stablo, analiza



- Rekurzivno izračunavanje koeficijenata DWT wavelet filteraskim stablom.
- Razlaganje se ponavlja u niskopropusnoj grani.

7

Wavelet stablo, rekonstrukcija



- Rekurzivna rekonstrukcija signala wavelet filteraskim stablom.
- Ako je svaki filteraski slog s PR, jasno je i da je cijeli sustav s potpunom rekonstrukcijom.

8

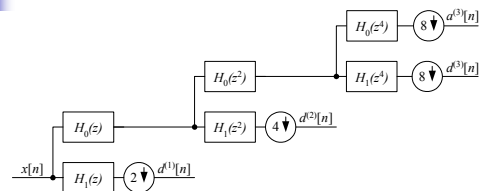
Funkcije razlaganja

- Pitanje je koje su funkcije razlaganja u wavelet filteraskom stablu i koja je veza s DWT transformacijom?
- U stablu se javlja kaskada decimatora i filtera.
- Zamjena redosljeda rezultira sljedećim relacijama (*eng. Noble Identities*):

$$\begin{aligned} \overset{X(z)}{\text{---}} \textcircled{\downarrow 2} \text{---} H(z) \text{---} \overset{Y(z)}{\text{---}} &\equiv \overset{X(z)}{\text{---}} H(z^2) \text{---} \textcircled{\downarrow 2} \text{---} \overset{Y(z)}{\text{---}} \\ \overset{X(z)}{\text{---}} \textcircled{\downarrow 2} \text{---} H(z) \text{---} \overset{Y(z)}{\text{---}} &\equiv \overset{X(z)}{\text{---}} H(z^2) \text{---} \textcircled{\downarrow 2} \text{---} \overset{Y(z)}{\text{---}} \end{aligned}$$

9

Wavelet stablo, analiza



- U N-toj razini imamo sljedeće kaskade filtera:

$$H_0^{(N)}(z) = \prod_{i=0}^{N-1} H_0(z^{2^i}) \quad H_1^{(N)}(z) = H_1(z^{2^{N-1}}) \prod_{i=0}^{N-2} H_0(z^{2^i})$$

10

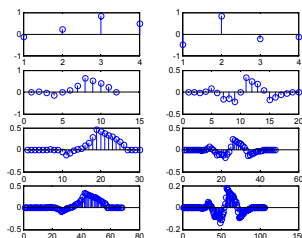
Wavelet stablo, analiza

$$H_1^{(N)}(z) = H_1(z^{2^{N-1}}) \prod_{i=0}^{N-2} H_0(z^{2^i}) \quad H_0^{(N)}(z) = \prod_{i=0}^{N-1} H_0(z^{2^i})$$

- Filtre $H_1^{(M)}$ određuju funkcije razlaganja u različitim razinama wavelet stabla ("wavelet funkcije").
- Filtre $H_0^{(M)}$ određuju njima komplementarne funkcije razlaganja ("funkcije skale").
- Pogledat ćemo primjer.

11

Analizirajući filteri db2 u četiri razine razlaganja



- U višim razinama razlaganja impulzni odziv filtera zadržava "isti oblik", ali ima približno dvostruko trajanje.

12

Wavelet funkcija i funkcija skale

- Definiramo kontinuirane funkcije, koje su po odsječcima jednake impulsnim odzivima filtera.

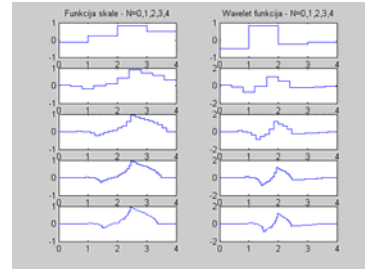
$$\varphi_N(t) = 2^{N/2} h_{0N}[n], \quad \frac{n}{2^N} \leq t < \frac{n+1}{2^N},$$

$$\psi_N(t) = 2^{N/2} h_{1N}[n], \quad \frac{n}{2^N} \leq t < \frac{n+1}{2^N}.$$

- Ovako definirane kontinuirane funkcije su normirane po vremenu i energiji.

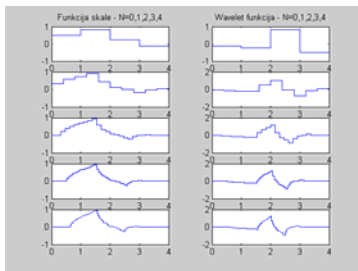
13

db2: konvergencija analizirajuće funkcije skale i wavelet funkcije



14

db2: konvergencija rekonstrukcijskih funkcija



15

Wavelet funkcija i funkcija skale za db2

- Pridružene kontinuirane funkcije konstantne po odsječcima konvergiraju ako broj razina razlaganja N teži u beskonačno.
- U našem primjeru rezultirajuće funkcije su zadovoljavajuće glatke (regularne).
- Uvjet realizacije DWT diskretnih signala filterskim slogom: **konvergencija** i **regularnost** pridruženih wavelet funkcija i funkcija skale kada broj razina razlaganja teži u beskonačnost.

16

Nužni i dovoljni uvjeti

- Pokazuje se da je za konvergenciju nužna nultočka niskopropusnog filtera $H_0(z)$ na $z=-1$, te vrijednost $\sqrt{2}$ na $z=1$:

$$H_0(z)|_{z=-1} = 0, \quad H_0(z)|_{z=1} = \sqrt{2};$$

- Dovoljan uvjet (Mallat 89) je da NP filter nema nultočaka na jediničnoj kružnici u rasponu od $-\pi/2$ do $\pi/2$.

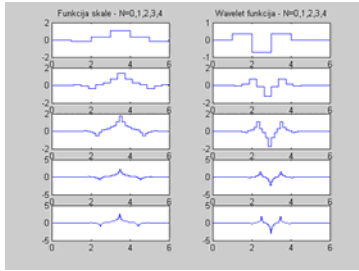
17

Nužni i dovoljni uvjeti

- Kod ortogonalnih slogova rekonstrukcijske funkcije su zrcalno preokrenute analizirajuće.
- Kod biortogonalnih slogova rekonstrukcijske funkcije redovito su sasvim različite od analizirajućih.
- Za brojne primjene (kompresija, potiskivanje šuma, ...) važnija nam je regularnost rekonstrukcijskih funkcija.

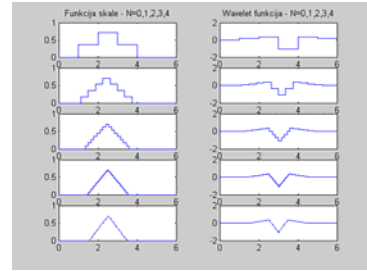
18

bior2.2: konvergencija analizirajuće funkcije skale i wavelet funkcije



19

bior2.2: konvergencija rekonstrukcijskih funkcija



20

Analizirajuća strana: filtarski koeficijenti i funkcije

- Neka funkcija skale i wavelet funkcija konvergiraju:

$$\varphi(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \varphi_N(t), \quad \psi(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \psi_N(t).$$

- Vrijede sljedeće veze s filtarskim koeficijentima:

$$\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{N_1} h_0[k] \varphi(2t-k) \quad \psi(t) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{N_1} h_1[k] \varphi(2t-k)$$

- Provjerit ćemo na primjeru.

21

Analizirajuća strana: filtarski koeficijenti i funkcije

$$\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{N_1} h_0[k] \varphi(2t-k) \quad \psi(t) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{N_1} h_1[k] \varphi(2t-k)$$

- Primjer (Haarov wavelet):

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1/2 \\ -1 & 1/2 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{drugdje} \end{cases} \quad \psi(t) = \varphi(2t) - \varphi(2t-1) \quad h_1 = \{1, -1\} / \sqrt{2}$$

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{drugdje} \end{cases} \quad \psi(t) = \varphi(2t) + \varphi(2t-1) \quad h_0 = \{1, 1\} / \sqrt{2}$$

22

Brza oktavna DWT

$$\psi_{m,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^k}} \psi\left(\frac{t}{2^k} - m\right), \quad X[m,k] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \psi_{m,k}(t) dt$$

- Neka je $\psi(t)$ wavelet funkcija (limes $\psi_N(t)$), te neka je $\varphi(t)$ pripadna funkcija skale.
- Krenemo računanje na primjer od razine $k=0$:

$$A[m,0] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \varphi(t-m) dt$$

- $A[m,k]$ zovemo aproksimacijskim koeficijentima.

23

Brza oktavna DWT

- Kako je slijedi: $\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{N_1} h_1[k] \varphi(2t-k)$

$$\psi\left(\frac{t}{2} - m\right) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{N_1} h_1[k] \varphi(t-k-2m)$$

$$X[m,1] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sum_{k=0}^{N_1} h_1[k] \varphi(t-k-2m) dt$$

$$X[m,1] = \sum_{k=0}^{N_1} h_1[k] A[2m-k,0]$$

- Ovo odgovara filtriranju koeficijenata $A[m,0]$ filtrom h_1 , te decimaciji s faktorom 2.

24

Brza oktavna DWT

- Iz slijedi:

$$\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{N_0} h_0[k] \varphi(2t - k)$$

$$A[m,1] = \sum_{k=0}^{N_0} h_0[k] A[2m - k, 0]$$
- To je filtriranje s h_0 i decimacija s faktorom 2.
- Konačno, imamo postupak za brzu DWT:
 - 1.) integriranjem signala pomnoženog s pomaknutim funkcijama izračunavamo aproksimacijske koeficijente $A[m, k_0]$.
 - 2.) Za dobivanje $X[m, k]$ za $k > k_0$ aproksimacijske koeficijente propustimo kroz wavelet filtarski slog!

25

Brza oktavna DWT

- Brzo izračunavanje i rekonstrukciju DWT koeficijenata filtarskim slogom nazivamo i piramidalnim algoritmom.
- Primjer Haarova DWT:
 - Napraviti primjer na ploči i u MATLAB-u.
 - Na ploči koeficijente računati direktno.
 - Ilustrirati sukcesivnu aproksimaciju pri rekonstrukciji signala.

26

Zaključci

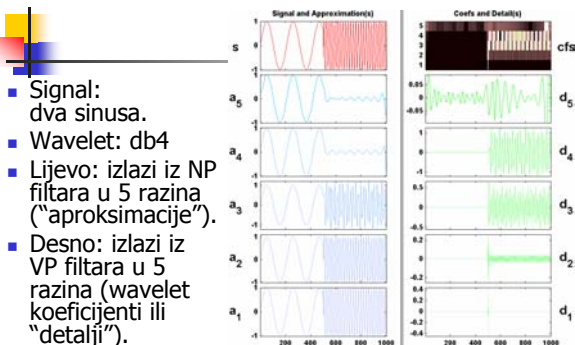
- Wavelet filtarski slog možemo koristiti za brzo računanje DWT.
- S druge strane, postupak dizajna filtarskog sloga možemo promatrati kao metodu projektiranja ortogonalnih ili biortogonalnih waveleta konačnog trajanja.

27

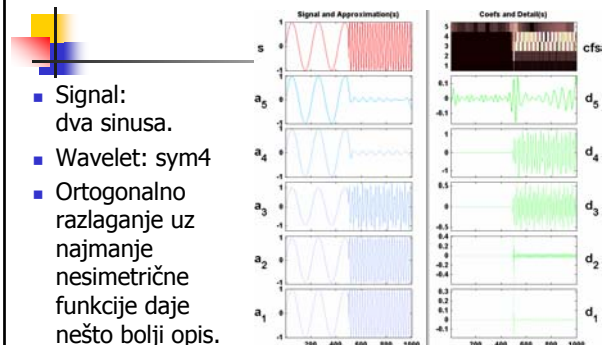
Analiza signala DWT slogom

- Napraviti ćemo analizu više signala različitim DWT slogovima.
- Prvi primjer: signal je složen od dva sinusa različite frekvencije.
- Analiza:
 - ortogonalnim wavelet filtarskim slogom db4.
 - ortogonalnim wavelet filtarskim slogom sym4.
 - Haarovim wavelet filtarskim slogom.

28



29



30

- Signal: dva sinusa.
- Wavelet: Haar.
- Razlaganje sinusnog signala u wavelete konstantne po odsječcima ne daje dobar opis.

31

Analiza polinoma DWT slogom

- Drugi primjer: signal je složen od dva polinoma (ovdje pravca različitih nagiba).
- Analiza:
 - biortogonalnim wavelet filtarskim slogom bior2.2
 - Zapis bior $m.n$ znači m nultočaka rekonstrukcijskog filtra F_0 i n nultočaka analizirajućeg filtra H_0 na frekvenciji $\omega = \pi$.

32

- Signal: dva pravca.
- Wavelet: bior2.2
- Wavelet s $m=2$ poništava polinome drugog reda.
- Rezultat: pravci u a_5 , diskontinuitet u wavelet koeficijente d_1 - d_5 .

33

Nultočke, nul-momentni i poništavanje polinoma

- Krenimo od biortogonalnog filtarskog sloga i promatramo rekonstrukcijski NP filter F_0 .
- Neka F_0 ima m nultočaka na Nyquistovoj frekvenciji $\omega = \pi$.
- Onda vrijedi:

$$\sum_{n=0}^m (-1)^n n^j f_0[n] = 0 \quad \text{za } j = 0, 1, \dots, m$$

34

Nultočke, nul-momentni i poništavanje polinoma

- m nultočaka od F_0 na $\omega = \pi$ znači:

$$F_0(\omega)_{\omega=\pi} = F_0'(\omega)_{\omega=\pi} = \dots = F_0^{(m-1)}(\omega)_{\omega=\pi} = 0.$$
- Napišemo izraze za spektar i njegove derivacije na $\omega = \pi$:

$$F_0(\omega)_{\omega=\pi} = \sum f_0[n] e^{-j\pi n} = \sum f_0[n] (-1)^n,$$

$$F_0'(\omega)_{\omega=\pi} = \sum f_0[n] (-jn) e^{-j\pi n} = \sum f_0[n] (-jn) (-1)^n,$$
 ...

Izjednačavanje svih izraza s nulom daje rezultat s prethodnog slajda.

35

Nultočke, nul-momentni i poništavanje polinoma

- Filter F_0 određuje analizirajući VP filter H_1 :

$$h_1[n] = (-1)^n \cdot f_0[n]$$
- pa imamo:

$$\sum_{n=0}^m n^j h_1[n] = 0 \quad \text{za } j = 0, 1, \dots, m$$
- Analizirajuća wavelet funkcija $\psi(t)$ nastaje kaskadnim algoritmom iz h_1 , stoga se može pokazati:

$$\int t^j \psi(t) dt = 0 \quad \text{za } j = 0, 1, \dots, m$$

36

Nultočke, nul-momenti i poništavanje polinoma

- Wavelet funkcija $\psi(t)$ ima m nul-momenata (*eng. vanishing moments*).
- Ako je analizirani signal polinom m -tog reda, wavelet koeficijenti će redom biti jednaki nuli.
- Takvo wavelet razlaganje **poništava** (*eng. annihilates*) **polinome**: informacija se prenosi isključivo u aproksimacijskim koeficijentima.
- Kako se svaka glatka funkcija može predstaviti polinomom u nekoj okolini, ovo je izuzetno važno svojstvo za koncentriranje informacije.

37

Nultočke, nul-momenti i poništavanje polinoma

- **Zaključak:**
Wavelet razlaganje je dobro za opis signala sastavljenih od odsječaka glatkih funkcija.
- Takvi su mnogi realni signali i slike!

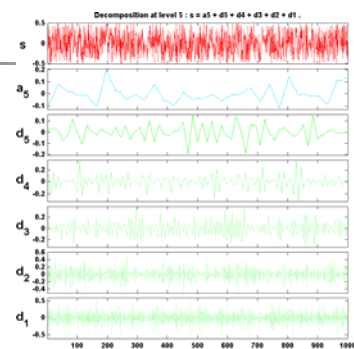
38

Analiza šuma DWT slogom

- Treći primjer: signal je bijeli šum.
- Analiza:
 - ortogonalnim wavelet filterskim slogom.

39

- Signal: bijeli šum.
- Wavelet: db3
- Šum se distribuira po wavelet koeficijentima u svim razinama razlaganja.



40

Potiskivanje šuma

- Četvrti primjer: signal je sastavljen od odsječaka polinoma s pribrojenim bijelim šumom.
- Analiza:
 - wavelet filterskim slogom bez decimacije.

41

Potiskivanje šuma

- Korisni signal sastavljen od odsječaka polinoma ili glatkih funkcija će se preslikati u mali broj wavelet i aproksimacijskih koeficijenata velike vrijednosti.
- Bijeli šum će se distribuirati po svim wavelet koeficijentima.

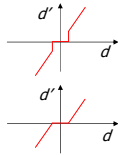
42

Potiskivanje šuma

- Ideja (dvije varijante):
 - Odbaciti wavelet koeficijente ispod nekog praga (*eng. hard thresholding*)
 - Odbaciti wavelet koeficijente ispod praga a ostale umanjiti za iznos praga (*eng. soft thresholding*).

$$d^*[n] = \begin{cases} d[n] & |d[n]| > \varepsilon, \\ 0 & |d[n]| \leq \varepsilon. \end{cases}$$

$$d^*[n] = \begin{cases} \text{sgn}(d[n]) (|d[n]| - \varepsilon) & |d[n]| > \varepsilon, \\ 0 & |d[n]| \leq \varepsilon. \end{cases}$$

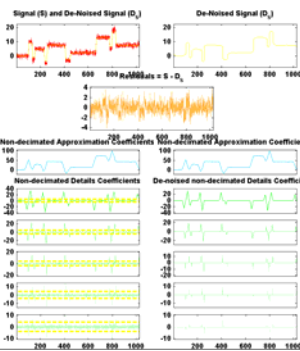


43

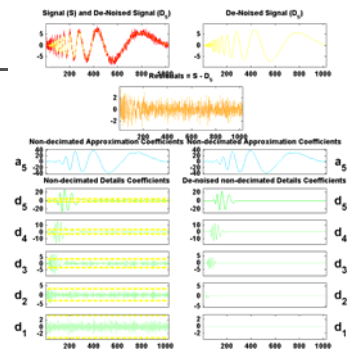
Potiskivanje šuma

- Prag se odabire tako da se potisne većina šuma.
- Prva varijanta daje manju pogrešku pri rekonstrukciji signala u smislu najmanjih kvadrata.
- Druga je redovito bolja u primjenama, osobito kod potiskivanja šuma u slici jer nema naglih skokova u vrijednosti koeficijenata.
- Bolje rezultate se postiže wavelet filtarskim slogom **bez decimacije**.

44



45

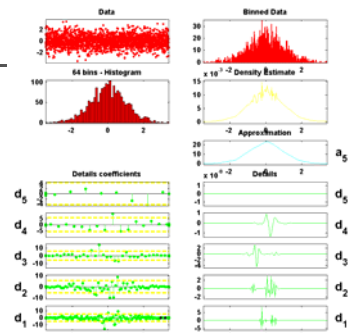


46

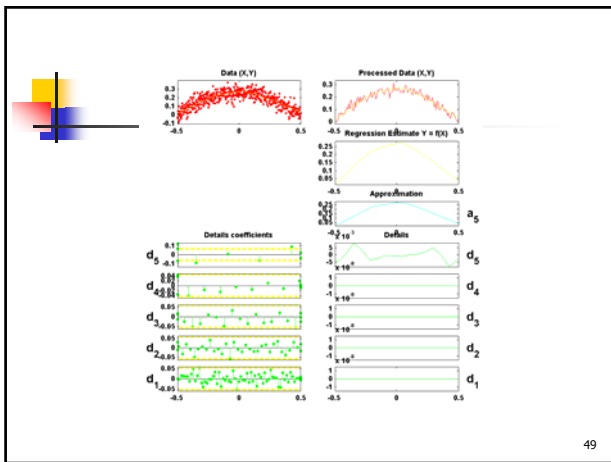
Druge primjene

- Metoda praga može se koristiti i za brojne druge primjene.
- Procjena funkcije gustoće vjerojatnosti
 - Na podacima iz histograma napravi se wavelet analiza, a metodom praga rezultati se učine glatkim.
- Wavelet regresija
 - Umjesto polinomom, funkcijska ovisnost se aproksimira wavelet funkcijama.

47



48



49

Teme predavanja

- Wavelet filterski slogovi
- Wavelet funkcija i funkcija skale
- Brza oktavna DWT
- Analiza signala DWT slogom
 - Frekvencijska analiza
 - Detekcija diskontinuiteta
 - Poništavanje polinoma
- Potiskivanje šuma metodom praga i druge primjene.

50