

## Osnove slučajnih procesa



Prof. dr. sc. Sven Lončarić

Prof. dr. sc. Hrvoje Babić

Doc. dr. sc. Damir Seršić

## Literatura

- WEB: <http://ts.zesoi.fer.hr>
- H. Babić, S. Lončarić, D. Seršić: *Slučajni procesi u sustavima*, <http://spus.zesoi.fer.hr>, 2002.
- P. Z. Peebles: *Probability, Random Variables and Random Signal Principles*, 3rd ed., McGraw-Hill, 1993.
- D.G.Manolakis, V.K.Ingle, S.M.Kogon: *Statistical and Adaptive Signal Processing*, McGraw-Hill, 2000
- M.H. Hayes: *Statistical digital signal processing and modeling*, John Wiley & Sons, 1996.

## Pregled tema

- Uvod
- Koncept slučajnog procesa
- Klasifikacija slučajnih procesa
- Funkcije distribucije slučajnog procesa
- Stacionarnost i nezavisnost
- Korelacijske i kovarijacijske funkcije
- Primjeri slučajnih procesa

## Uvod

- Neke su pojave po prirodi determinističke, a neke su stohastičke.
- Nekad se i komplikirane determinističke pojave tretiraju kao stohastičke jer bi deterministički problem bio prekompliciran za modeliranje.
- Mnoge pojave i procesi u tehniči mogu se interpretirati kao slučajni signali i tako analizirati.
- Zato je u znanosti i inženjerstvu potrebno znati obradivati slučajne valne oblike i signale.

---

---

---

---

---

---

## Koncept slučajnog procesa

- Naziv: slučajni proces ili stohastički proces.
- Engl. *random process* ili *stochastic process*.
- Koncept slučajnog procesa dobiva se iz koncepta slučajne varijable uz dodavanje vremenske varijable.

---

---

---

---

---

---

## Slučajna varijabla

- Podsjetnik: po definiciji, slučajna varijabla je preslikavanje koje svakom ishodu  $s$  eksperimenta dodjeljuje broj  $x(s)$ , a koji se zove realizacija slučajne varijable.
- Svaki ishod eksperimenta ima svoju vjerojatnost tako da i svaka realizacija slučajne varijable ima svoju vjerojatnost.
- Skup svih vrijednosti  $x(s)$  zove se slučajna varijabla i označava se s  $\mathbf{X}(s)$  ili češće samo s  $\mathbf{X}$ .

---

---

---

---

---

---

## Koncept slučajnog procesa

- Slučajni proces je preslikavanje koje svakom ishodu eksperimenta  $s$  dodjeljuje funkciju vremena  $x(t, s)$ .
- Obitelj svih takvih funkcija  $x(t, s)$  zove se slučajni proces i označava se kao  $\mathbf{X}(t, s)$ .
- Češće se koristi kratka notacija gdje se piše samo  $x(t)$  za jednu specifičnu realizaciju slučajnog procesa te notacija  $\mathbf{X}(t)$  za slučajni proces.

## Koncept slučajnog procesa

- Pojedina funkcija  $x(t, s)$  za neki fiksni  $s$  naziva se realizacija slučajnog procesa.
- Kada fiksiramo  $s$  a ostavimo  $t$  kao varijablu onda slučajni proces predstavlja jednu vremensku funkciju .
- Kada fiksiramo  $t$ , a ostavimo  $s$  kao varijablu onda slučajni proces postaje slučajna varijabla  $\mathbf{X}(t)$ .

## Koncept slučajnog procesa

- Za  $t = t_1$   $\mathbf{X}(t_1, s)$  je slučajna varijabla
-

## Klasifikacije slučajnih procesa

- Klasifikacije je moguće obaviti na temelju nekoliko različitih kriterija kao što su:
  - s obzirom na diskretnost tj. kontinuiranost,
  - na determinističke i nedeterminističke,
  - na stacionarne i nestacionarne.

---

---

---

---

---

---

## Klasifikacija s obzirom na diskretizaciju

- Klasifikacija s obzirom na diskretizaciju vrši se na osnovi diskretnosti / kontinuiranosti parametara  $t$  i  $\mathbf{X}(t)$ :
  - argument  $t$  može biti kontinuiran i diskretan,
  - vrijednosti  $\mathbf{X}(t)$  mogu biti kontinuirane i diskrette.
- Uz takav način klasifikacije imamo četiri moguća slučaja.

---

---

---

---

---

---

## Kontinuirani slučajni proces

- Ako je  $\mathbf{X}(t)$  kontinuiran i  $t$  je kontinuirana varijabla onda se  $\mathbf{X}(t)$  zove kontinuirani slučajni proces.
- Primjer:
  - termički šum generiran u nekoj mreži koja sadrži otpornike.

---

---

---

---

---

---

## Diskretni slučajni proces

- Ako slučajna varijabla  $\mathbf{X}(t)$  poprima samo neke diskretne vrijednosti, a  $t$  je kontinuirana varijabla tada se  $\mathbf{X}(t)$  zove diskretni slučajni proces.
- Primjer:
  - ako kvantiziramo vrijednost nekog kontinuiranog slučajnog procesa dobivamo diskretni slučajni proces (npr. uslijed A/D konverzije, npr. 8-bitova).

---

---

---

---

---

---

## Kontinuirani slučajni niz

- Slučajni proces kod kojeg je  $\mathbf{X}(t)$  kontinuirana ali vrijeme  $t$  je diskretizirano zove se kontinuirani slučajni niz.
- Primjer:
  - ovaj slučaj dobivamo ako otipkamo u vremenu neki kontinuirani slučajni proces.

---

---

---

---

---

---

## Diskretni slučajni niz

- Ako su i vrijednost  $\mathbf{X}(t)$  i varijabla  $t$  diskretni onda se takav proces naziva diskretni slučajni niz.
- Primjer:
  - kvantizacija u vremenu i iznosu.

---

---

---

---

---

---

## Klasifikacija s obzirom na predvidivost

- Slučajni proces se može opisati pomoću valnog oblika funkcija realizacija tog procesa.
- Ako se buduće vrijednosti funkcije realizacije ne mogu točno predviđeni iz prošlih vrijednosti onda se slučajni proces zove nedeterministički.
- Ako se buduće vrijednosti neke funkcije realizacije mogu točno predviđeni iz prošlih vrijednosti onda se slučajni proces zove deterministički.

---

---

---

---

---

---

## Primjer

- Neka je slučajni proces  $\mathbf{X}(t)$  definiran izrazom
$$\mathbf{X}(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$
gdje  $A$ ,  $\phi$  ili  $\omega_0$  mogu biti slučajne varijable.
- Tada je  $\mathbf{X}(t)$  deterministički slučajni proces.

---

---

---

---

---

---

## Klasifikacija s obzirom na stacionarnost

- Slučajni procesi se s obzirom na stacionarnost mogu podijeliti na stacionarne i nestacionarne slučajne procese.
- Stacionarni slučajni procesi su oni čija se statistička svojstva ne mijenjaju s vremenom.
- Nestacionarni slučajni procesi su oni koji nisu stacionarni.

---

---

---

---

---

---

## Funkcije distribucije slučajnog procesa

- Za neki slučajni proces  $\mathbf{X}(t)$  može se izračunati:
  - funkcija distribucije prvog reda,
  - funkcija distribucije drugog reda,
  - funkcija distribucije  $N$ -tog reda.

---

---

---

---

---

---

## Funkcija distribucije prvog reda

- U određenom trenutku  $t$ ,  $\mathbf{X}(t)$  je slučajna varijabla koja ima funkciju distribucije definiranu izrazom:
$$F_X(x, t) = P(\mathbf{X}(t) \leq x)$$
- Ova se funkcija također zove funkcija distribucije prvog reda slučajnog procesa  $\mathbf{X}(t)$  zato jer se promatra distribucija samo jedne slučajne varijable (u trenutku  $t$ ).

---

---

---

---

---

---

## Funkcija distribucije drugog reda

- Za dvije slučajne varijable  $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}(t_1)$  i  $\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}(t_2)$  definirane u dva vremenska trenutka  $t_1$  i  $t_2$  funkcija distribucije drugog reda slučajnog procesa  $\mathbf{X}(t)$  definirana je kao:

$$F_X(x_1, x_2, t_1, t_2) = P(\mathbf{X}(t_1) \leq x_1, \mathbf{X}(t_2) \leq x_2)$$

---

---

---

---

---

---

## Funkcija distribucije $N$ -tog reda

- Za  $N$  slučajnih varijabli  $\mathbf{X}_i = \mathbf{X}(t_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  funkcija distribucije  $N$ -tog reda slučajnog procesa  $\mathbf{X}(t)$  definirana je izrazom:

$$F_X(x_1, \dots, x_N, t_1, \dots, t_N) = \\ = P(\mathbf{X}(t_1) \leq x_1, \dots, \mathbf{X}(t_N) \leq x_N)$$

---

---

---

---

---

---

## Funkcije gustoće vjerojatnosti slučajnog procesa

- Za neki slučajni proces  $\mathbf{X}(t)$  može se izračunati:
  - funkcija gustoće vjerojatnosti prvog reda,
  - funkcija gustoće vjerojatnosti drugog reda,
  - funkcija gustoće vjerojatnosti  $N$ -tog reda.

---

---

---

---

---

---

## Funkcija gustoće vjerojatnosti prvog reda

- Funkcija gustoće vjerojatnosti prvog reda slučajnog procesa  $\mathbf{X}(t)$  definirana je izrazom:

$$f_X(x, t) = \frac{dF_X(x, t)}{dx}$$

---

---

---

---

---

---

## Funkcija gustoće vjerojatnosti drugog reda

- Funkcija gustoće vjerojatnosti drugog reda slučajnog procesa  $\mathbf{X}(t)$  definirana je izrazom:

$$f_X(x_1, x_2, t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F_X(x_1, x_2, t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$$

---

---

---

---

---

---

## Funkcija gustoće vjerojatnosti $N$ -tog reda

- Analogno je definirana funkcija gustoće vjerojatnosti  $N$ -tog reda slučajnog procesa  $\mathbf{X}(t)$ :

$$f_X(x_1, \dots, x_N, t_1, \dots, t_N) = \frac{\partial^N F_X(x_1, \dots, x_N, t_1, \dots, t_N)}{\partial x_1 \cdots \partial x_N}$$

---

---

---

---

---

---

## Stacionarnost i nezavisnost

- U nastavku uvodimo pojmove
  - stacionarnosti,
  - nezavisnosti,za slučajne procese.

---

---

---

---

---

---

## Pojam stacionarnosti

- Za neki fiksni trenutak  $t$   $\mathbf{X}(t)$  predstavlja slučajnu varijablu.
- Ta slučajna varijabla ima svoja statistička svojstva (srednju vrijednost, varijancu, momente) koje ovise o njezinoj funkciji gustoće vjerojatnosti.
- Slično ako promatramo dvije slučajne varijable  $\mathbf{X}(t_1)$  i  $\mathbf{X}(t_2)$  u nekim trenucima  $t_1$  i  $t_2$  onda one imaju funkciju gustoće drugog reda koja određuje statistička svojstva drugog reda.

---

---

---

---

---

---

## Pojam stacionarnosti

- Ako promatramo  $N$  vremenskih trenutaka  $t_1, \dots, t_N$  dobivamo  $N$  slučajnih varijabli  $\mathbf{X}(t_1), \dots, \mathbf{X}(t_N)$  čija su statistička svojstva određena funkcijom gustoće vjerojatnosti  $N$ -tog reda.
- Ako se statistička svojstva ne mijenjaju s vremenom, onda je slučajni proces stacionaran.

---

---

---

---

---

---

## Definicija stacionarnosti

- Definicija: stohastički proces  $\mathbf{X}(t)$  je stacionaran ako za svaki  $n \in N$ , za svaki izbor trenutaka  $t_1, \dots, t_n$  i za svaki  $u \in \mathbf{R}$  slučajne varijable  $\mathbf{X}(t_1), \dots, \mathbf{X}(t_n)$  i slučajne varijable  $\mathbf{X}(t_1+u), \dots, \mathbf{X}(t_n+u)$  imaju jednake funkcije distribucije  $n$ -tog reda.

---

---

---

---

---

---

## Definicija nestacionarnosti

- Definicija: slučajni proces koji nije stacionaran zove se nestacionaran slučajni proces.

---

---

---

---

---

---

## Definicija statističke nezavisnosti

- Dva procesa  $\mathbf{X}(t)$  i  $\mathbf{Y}(t)$  su statistički nezavisni ako je grupa slučajnih varijabli  $\mathbf{X}(t_1), \dots, \mathbf{X}(t_N)$  nezavisna od grupe  $\mathbf{Y}(t_1'), \dots, \mathbf{Y}(t_N')$  za bilo koji izbor trenutaka  $t_1, \dots, t_N, t_1', \dots, t_N'$ .
- Nezavisnost zahtijeva da vrijedi:

$$f_{x,y}(x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_N, t_1, \dots, t_N, t_1', \dots, t_N') = f_X(x_1, \dots, x_N, t_1, \dots, t_N) f_Y(y_1, \dots, y_N, t_1', \dots, t_N')$$

---

---

---

---

---

---

## Stacionarnost prvog reda

- Definicija: Slučajni proces je stacionaran prvog reda ako se funkcija gustoće vjerojatnosti prvog reda ne mijenja s vremenom:

$$f_x(x, t) = f_x(x, t + \Delta t)$$

za svaki  $t$  i  $\Delta t$ .

---

---

---

---

---

---

## Stacionarnost prvog reda

- Posljedica prethodne definicije je da za stacionarni proces prvog reda funkcija gustoće vjerojatnosti  $f_s(x, t)$  ne ovisi o vremenu  $t$ .
- To znači da su sve statistike (srednja vrijednost, varijanca, i ostale) nepromjenjive u vremenu.

---

---

---

---

---

---

## Stacionarnost drugog reda

- Definicija: slučajni proces je stacionaran drugog reda ako vrijedi

$$f_X(x_1, x_2, t_1, t_2) = f_X(x_1, x_2, t_1 + \Delta t, t_2 + \Delta t)$$

---

---

---

---

---

---

## Stacionarnost drugog reda

- Stacionarni proces drugog reda je također i stacionarni proces prvog reda zato jer funkcija gustoće drugog reda određuje i funkciju gustoće prvog reda:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy$$

---

---

---

---

---

---

## Stacionarnost drugog reda

- Ako u izrazu za definiciju stacionarnosti

$$f_X(x_1, x_2, t_1, t_2) = f_X(x_1, x_2, t_1 + \Delta t, t_2 + \Delta t)$$

- odaberemo npr.  $\Delta t = -t_1$ , tada dobivamo

$$f_X(x_1, x_2, t_1, t_2) = f_X(x_1, x_2, 0, t_2 - t_1)$$

- Dakle vidi se da  $f_X$  ovisi samo o razlici  $t_2 - t_1$

---

---

---

---

---

---

## Korelacija slučajnih varijabli

- Promatrajmo korelaciju dvaju slučajnih varijabli  $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}(t_1)$  i  $\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}(t_2)$  definiranu izrazom

$$E[\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_2] = E[\mathbf{X}(t_1) \mathbf{X}(t_2)]$$

- Vidi se da ova korelacija općenito ovisi o trenucima  $t_1$  i  $t_2$ .

---

---

---

---

---

---

## Autokorelacijska funkcija slučajnog procesa

- Definicija: autokorelacijska funkcija slučajnog procesa  $\mathbf{X}(t)$  definirana je izrazom:

$$R_{XX}(t_1, t_2) = E[\mathbf{X}(t_1) \mathbf{X}(t_2)]$$

- Dakle autokorelacijska funkcija jednaka je jednostavnoj korelaciji dviju susjednih slučajnih varijabli.

---

---

---

---

---

---

## Autokorelacijska funkcija slučajnog procesa

- Budući da korelacija dviju slučajnih varijabli ovisi o funkciji gustoće drugog reda, slijedi da autokorelacijska funkcija stacionarnog procesa drugog reda ovisi samo o razlici  $\tau = t_2 - t_1$ .

$$R_{XX}(t_1, t_1 + \tau) = E[\mathbf{X}(t_1)\mathbf{X}(t_1 + \tau)] = R_{XX}(\tau)$$

---

---

---

---

---

---

## Stacionarnost u širem smislu

- Mnogi praktični inženjerski problemi traže analizu autokorelacijske funkcije i srednje vrijednosti slučajnog procesa.
- Rješenja tih problema su jednostavnija kada ove veličine ne ovise o absolutnom vremenu.
- Naravno, ako je proces stacionaran drugog reda autokorelacijska funkcija i srednja vrijednost ne ovise o vremenu, no to je prestrog uvjet koji se često ne da provjeriti u praksi.

---

---

---

---

---

---

## Stacionarnost u širem smislu

- Zato se uvodi pojam stacionarnosti u širem smislu, koji nije tako strog kao stacionarnost drugog reda
- Definicija: proces je stacionaran u širem smislu ako vrijedi:

$$E[\mathbf{X}(t)] = \text{konst}$$
$$E[\mathbf{X}(t)\mathbf{X}(t + \tau)] = R_{XX}(\tau)$$

---

---

---

---

---

---

## Stacionarnost u širem smislu

- Proces koji je stacionaran drugog reda je i stacionaran u širem smislu.
- Obrat ne vrijedi.

---

---

---

---

---

---

## Primjer

- Zadan je slučajni proces  
$$\mathbf{X}(t) = A \cos(\omega_0 t + \Theta)$$
gdje su  $A$  i  $\omega_0$  konstante, a  $\Theta$  je uniformno distribuirana slučajna varijabla na intervalu  $(0, 2\pi)$ .
- Da bi ispitali da li je ovaj slučajni proces stacionaran u širem smislu odredit ćemo njegovu srednju vrijednost i autokorelacijsku funkciju.

---

---

---

---

---

---

## Primjer: Srednja vrijednost

- Srednja vrijednost:  
$$E[\mathbf{X}(t)] = \int_0^{2\pi} A \cos(\omega_0 t + \Theta) \frac{1}{2\pi} d\Theta = 0$$
- Dakle vidi se da srednja vrijednost ne ovisi o vremenu  $t$ .

---

---

---

---

---

---

### Primjer: Autokorelacijska funkcija

$$\begin{aligned} R_{xx}(t, t + \tau) &= E[A \cos(\omega_0 t + \Theta) A \cos(\omega_0 t + \omega_0 \tau + \Theta)] \\ &= \frac{A^2}{2} E[\cos(\omega_0 \tau) + \cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau + 2\Theta)] \\ &= \frac{A^2}{2} \cos(\omega_0 \tau) + \frac{A^2}{2} \underbrace{E[\cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau + 2\Theta)]}_0 \\ &= \frac{A^2}{2} \cos(\omega_0 \tau) = R_{xx}(\tau) \end{aligned}$$

- Dakle autokorelacijska funkcija ovisi samo o  $\tau$ .

### Primjer

- Pokazali smo da u ovom primjeru
  - srednja vrijednost slučajnog procesa  $\mathbf{X}(t)$  ne ovisi o vremenu, a
  - autokorelacijska funkcija ovisi samo o razlici vremena  $\tau$  a ne i o absolutnom vremenskom trenutku  $t$ .
- Slijedi da je proces  $\mathbf{X}(t)$  stacionaran u širem smislu.

### Stacionarnost $N$ -tog reda

- Definicija: slučajni proces je stacionaran  $N$ -tog reda ako vrijedi da

$$\begin{aligned} f_X(x_1, \dots, x_N, t_1, \dots, t_N) &= \\ &= f_X(x_1, \dots, x_N, t_1 + \Delta t, \dots, t_N + \Delta t) \end{aligned}$$

## Stacionarnost $N$ -tog reda

- Stacionarnost  $N$ -tog reda implicira stacionarnost svakog reda  $k \leq N$ .
- Proces koji je stacionaran za svaki  $N = 1, 2, \dots$  zove se stacionaran u užem smislu (ili strogo stacionaran).

---

---

---

---

---

---

---

## Vremensko usrednjavanje i ergodičnost

- U nastavku teksta uvodimo pojmove
  - vremenskog usrednjavanja i
  - ergodičnosti.

---

---

---

---

---

---

---

## Vremensko usrednjavanje

- Definicija: vremensko usrednjavanje (ili prosjek) neke veličine definiran je kao:

$$A[\cdot] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [\cdot] dt$$

- Notacija  $A$  je analogna notaciji  $E$  za statistički prosjek.
- $A$  je vremenski prosjek (engl. *time-average*)

---

---

---

---

---

---

---

## Vremensko usrednjavanje

- Naročito su interesantni u primjenama slijedeći vremenski projeci:
  - vremenska srednja vrijednost,
  - vremenska autokorelacijska funkcija.

---

---

---

---

---

---

## Vremenska srednja vrijednost

- Vremenska srednja vrijednost definirana je izrazom:

$$\bar{x} = A[x(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt$$

---

---

---

---

---

---

## Vremenska autokorelacijska funkcija

- Vremenska autokorelacijska funkcija definirana je izrazom:

$$R_{xx}(\tau) = A[x(t)x(t + \tau)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t + \tau) dt$$

---

---

---

---

---

---

## Diskusija vremenskog usrednjavanja

- Za jednu određenu realizaciju  $x(t)$  slučajnog procesa izrazi za vremensku srednju vrijednost i vremensku autokorelacijsku funkciju (za neki fiksni  $\tau$ ) daju dva broja.

---

---

---

---

---

---

## Diskusija vremenskog usrednjavanja

- Za sve funkcije realizacije vremenska srednja vrijednost i vremenska autokorelacijska funkcija postaju slučajne varijable.
- Može se vidjeti da ako je  $X$  stacionaran proces u širem smislu vrijedi

$$E[\bar{x}] = E[\mathbf{X}(t)] = \bar{\mathbf{X}}$$

$$E[R_{xx}(\tau)] = R_{xx}(\tau)$$

---

---

---

---

---

---

## Ergodičnost

- Definicija: slučajni proces je ergodičan ako je vremensko usrednjavanje jednako statističkom usrednjavanju.
- Drugim riječima ergodičnost znači da npr. vremenska srednja vrijednost mora biti jednaka statističkoj srednjoj vrijednosti.

---

---

---

---

---

---

## Diskusija ergodičnosti

- Zašto je ergodičnost važna?
- Pretpostavimo da želimo odrediti statističku srednju vrijednost  $\eta(t) = E[x(t)]$  procesa  $\mathbf{X}(t)$ .
- Da bi to odredili možemo sakupiti veliki broj funkcija realizacije  $x(t, s_i)$  i izračunati statističku srednju vrijednost

$$\eta(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x(t, s_i)$$

---

---

---

---

---

---

## Diskusija ergodičnosti

- No problem je ako imamo samo jednu realizaciju slučajnog procesa. Možemo li u tom slučaju koristiti vremensko usrednjavanje da odredimo srednju vrijednost?

$$\bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t, s) dt$$

- Odgovor: možemo ako je  $\eta(t) = \text{konst.}$  te ako je proces ergodičan.

---

---

---

---

---

---

## Praktične napomene

- U praksi često možemo pretpostaviti da je proces ergodičan.
- Nekad nemamo drugog izbora.

---

---

---

---

---

---

## Korelacijske funkcije

- U nastavku definirat ćemo:
  - auto-korelacijsku funkciju,
  - kros-korelacijsku funkciju,
  - auto-kovarijancijsku funkciju,
  - kros-kovarijancijsku funkciju.

---

---

---

---

---

## Auto-korelacijska funkcija

- Definicija: auto-korelacijska funkcija slučajnog procesa  $\mathbf{X}(t)$  je korelacija dvaju slučajnih varijabli  $\mathbf{X}(t)$  i  $\mathbf{X}(t + \tau)$

$$R_{XX}(t, t + \tau) = E[\mathbf{X}(t)\mathbf{X}(t + \tau)]$$

---

---

---

---

---

## Svojstva

- Za procese koji su stacionarni u širem smislu

$$R_{XX}(\tau) = E[\mathbf{X}(t)\mathbf{X}(t + \tau)]$$

- Tada vrijedi

$$|R_{XX}(\tau)| \leq R_{XX}(0)$$

$$R_{XX}(-\tau) = R_{XX}(\tau)$$

$$R_{XX}(0) = E[\mathbf{X}^2(t)]$$

---

---

---

---

---

## Kros-korelacijska funkcija

- Definicija: kros-korelacijska funkcija dvaju slučajnih procesa  $\mathbf{X}(t)$  i  $\mathbf{Y}(t)$  definirana je kao
$$R_{XY}(t, t + \tau) = E[\mathbf{X}(t)\mathbf{Y}(t + \tau)]$$
- Ako su  $\mathbf{X}(t)$  i  $\mathbf{Y}(t)$  zajednički stacionarni u širem smislu onda je
$$R_{XY}(\tau) = E[\mathbf{X}(t)\mathbf{Y}(t + \tau)]$$

## Ortogonalni slučajni procesi

- Definicija: Ako za dva slučajna procesa  $\mathbf{X}(t)$  i  $\mathbf{Y}(t)$  vrijedi

$$R_{XY}(t, t + \tau) = 0$$

onda su  $\mathbf{X}(t)$  i  $\mathbf{Y}(t)$  ortogonalni slučajni procesi.

## Nezavisni slučajni procesi

- Definicija: ako su dva slučajna procesa  $\mathbf{X}(t)$  i  $\mathbf{Y}(t)$  statistički nezavisna onda vrijedi

$$R_{XY}(t, t + \tau) = E[\mathbf{X}(t)]E[\mathbf{Y}(t + \tau)]$$

- Ako su dva procesa još i stacionarni u širem smislu onda je

$$R_{XY}(t, t + \tau) = \overline{\mathbf{XY}} = \text{kost}$$

## Svojstva kros-korelacijskih funkcija

- Kros-korelacijske funkcije imaju slijedeća svojstva

$$R_{XY}(-\tau) = R_{YX}(\tau)$$
$$|R_{XY}(\tau)| \leq \sqrt{R_{XX}(0)R_{YY}(0)}$$
$$|R_{XY}(\tau)| \leq \frac{1}{2}[R_{XX}(0) + R_{YY}(0)]$$

## Auto-kovarijacijska funkcija

- Definicija: auto-kovarijacijska funkcija slučajnog procesa  $\mathbf{X}(t)$  definirana je kao

$$C_{XX}(t, t + \tau) =$$
$$= E[\{\mathbf{X}(t) - E[\mathbf{X}(t)]\} \{\mathbf{X}(t + \tau) - E[\mathbf{X}(t + \tau)]\}]$$

- Ovaj izraz može se pisati i kao

$$C_{XX}(t, t + \tau) =$$
$$= R_{XX}(t, t + \tau) - E[\mathbf{X}(t)]E[\mathbf{X}(t + \tau)]$$

## Kros-kovarijacijska funkcija

- Definicija: Kros-kovarijacijska funkcija dvaju slučajnih procesa  $\mathbf{X}(t)$  i  $\mathbf{Y}(t)$  definirana je izrazom:

$$C_{XY}(t, t + \tau) =$$
$$= E[\{\mathbf{X}(t) - E[\mathbf{X}(t)]\} \{\mathbf{Y}(t + \tau) - E[\mathbf{Y}(t + \tau)]\}]$$

- Izraz se može pisati i u slijedećoj formi

$$C_{XY}(t, t + \tau) =$$
$$= R_{XY}(t, t + \tau) - E[\mathbf{X}(t)]E[\mathbf{Y}(t + \tau)]$$

## Slučaj stacionarnih procesa

- Za slučajne procese koji su zajednički stacionarni u širem smislu vrijede jednostavniji izrazi za auto-kovarijancijsku i kros-kovarijancijsku funkciju:

$$C_{XX}(\tau) = R_{XX}(\tau) - \bar{X}^2$$
$$C_{XY}(\tau) = R_{XY}(\tau) - \bar{X}\bar{Y}$$

---

---

---

---

---

## Varijanca slučajnog procesa

- Definicija: varijanca slučajnog procesa je vrijednost auto-kovarijancijske funkcije za  $\tau = 0$ :

$$\sigma_x^2 = C_{XX}(t, t)$$

- Za proces koji je stacionaran u širem smislu vrijedi:

$$\sigma_x^2 = C_{XX}(t, t) = R_{XX}(0) - \bar{X}^2 = \text{konst}$$

---

---

---

---

---

## Nekorelirani slučajni procesi

- Definicija: Za dva slučajna procesa  $\mathbf{X}(t)$  i  $\mathbf{Y}(t)$  ako vrijedi

$$C_{XY}(t, t + \tau) = 0$$

onda su procesi nekorelirani.

---

---

---

---

---

## Mjerenje korelacijske funkcije

- U praksi ne možemo nikada izmjeriti prave korelacijske funkcije dvaju procesa  $\mathbf{X}(t)$  i  $\mathbf{Y}(t)$  zato jer nikada nemamo sve realizacije procesa.
- Jedini način u tom slučaju je mjerenje vremenskim usrednjavanjem u dovoljno dugom intervalu i uz prepostavku da se radi o ergodičnom procesu.

---

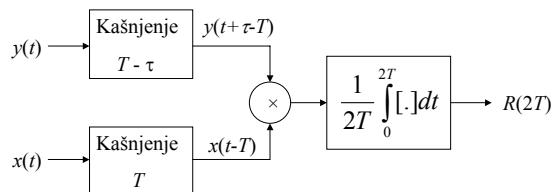
---

---

---

---

## Mjerenje kros-korelacijske funkcije



---

---

---

---

---

## Mjerenje kros-korelacijske funkcije

- Ako u trenutku  $t = 0$  započinje integracija i ako promatramo izlaz  $R(t)$  u trenutku  $t = 2T$  onda

$$\begin{aligned} R(2T) &= \frac{1}{2T} \int_0^{2T} x(t-T)y(t-T+\tau) dt \\ &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t')y(t'+\tau) dt' \end{aligned}$$

- Dakle za  $T \gg$  vrijedi  $R(2T) \approx R_{xy}(\tau) = R_{xy}(\tau)$

## Mjerenje auto-korelacijske funkcije

- Ako na prethodnom blok dijagramu spojimo ulaze onda možemo mjeriti auto-korelacijsku funkciju slučajnog procesa pod pretpostavkom da je proces ergodičan.

---

---

---

---

---

---

## Primjer

- Treba izmjeriti autokorelacijsku funkciju procesa iz ranijeg primjera

$$\mathbf{X}(t) = A \cos(\omega_0 t + \Theta)$$

gdje je  $\Theta$  uniformnog distribuirana slučajna varijabla u intervalu  $(0, 2\pi)$ .

---

---

---

---

---

---

## Primjer

- Izlaz sustava s blok dijagrama dan je izrazom:

$$\begin{aligned} R(2T) &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T A^2 \cos(\omega_0 t + \Theta) \cos(\omega_0 t + \Theta + \omega_0 \tau) dt \\ &= \frac{A^2}{4T} \int_{-T}^T [\cos(\omega_0 \tau) + \cos(2\omega_0 t + 2\Theta + \omega_0 \tau)] dt \end{aligned}$$

gdje je  $\Theta$  jedna realizacija slučajne varijable  $\Theta$ .

---

---

---

---

---

---

## Primjer

- Može se dakle vidjeti da je

$$R(2T) = R_{XX}(\tau) + \varepsilon(\tau)$$

gdje je

$$R_{XX}(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(\omega_0 \tau)$$

prava vrijednost auto-korelacijske funkcije kao što je izvedeno u ranijem primjeru.

---

---

---

---

---

---

## Primjer

- Drugi pribrojnik

$$\varepsilon(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(\omega_0 \tau + 2\Theta) \frac{\sin(2\omega_0 T)}{2\omega_0 T}$$

je iznos pogreške koji ovisi o  $T$ .

- Ako pogreška mora biti  $20\times$  manja od najveće vrijednosti autokorelacijske funkcije onda

$$|\varepsilon(\tau)| \leq 0.05 R_{XX}(0) \Leftrightarrow T \geq \frac{10}{\omega_0}$$

---

---

---

---

---

---

## Primjeri slučajnih procesa

- U nastavku predstavit ćemo neke karakteristične slučajne procese:
  - Gaussov slučajni proces,
  - Bernoullijev proces,
  - slučajni hod,
  - Markovljev proces,
  - Poissonov proces.

---

---

---

---

---

---

## Gaussov slučajni proces

- Definicija: Neka je za slučajni proces  $\mathbf{X}(t)$  definirano  $N$  slučajnih varijabli  $\mathbf{X}_1=\mathbf{X}(t_1)$ ,  $\mathbf{X}_2=\mathbf{X}(t_2)$ , ...,  $\mathbf{X}_N=\mathbf{X}(t_N)$  koje su definirane u  $N$  vremenskih trenutaka  $t_1, t_2, \dots, t_N$ .
- Ako su za bilo koji  $N$  i trenutke  $t_1, t_2, \dots, t_N$  ove varijable zajednički Gaussove, tj. ako imaju gustoću vjerojatnosti  $N$ -tog reda danu izrazom

---

---

---

---

---

---

## Gaussov slučajni proces

$$f_x(x_1, \dots, x_N, t_1, \dots, t_N) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{C}_x^{-1} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})\right\}}{\sqrt{(2\pi)^N |\mathbf{C}_x|}}$$

gdje je vektor  $\mathbf{x} = [x_1 \dots x_N]^T$

te  $\bar{\mathbf{x}} = [\bar{x}_1 \dots \bar{x}_N]^T$

vektor srednjih vrijednosti, a

---

---

---

---

---

---

## Gaussov slučajni proces

$$\mathbf{C}_x = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1N} \\ \vdots & & & \vdots \\ C_{N1} & C_{N2} & \cdots & C_{NN} \end{bmatrix}$$

kovarijancijska matrica čiji su elementi

$$C_{ij} = E[(\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}}_i)(\mathbf{X}_j - \bar{\mathbf{X}}_j)] = C_{xx}(t_i, t_j)$$

$$\bar{\mathbf{X}}_i = E[\mathbf{X}_i] = E[\mathbf{X}(t_i)]$$

---

---

---

---

---

---

## Gaussov slučajni proces

- Iz definicije se vidi da je Gaussov slučajni proces određen s vektorom srednjih vrijednosti i kovarijancijskom matricom.
- Budući da vrijedi

$$C_{xx}(t_i, t_k) = R_{xx}(t_i, t_k) - E[\mathbf{X}(t_i)]E[\mathbf{X}(t_k)]$$

slijedi da je specifikacija Gaussovog procesa moguća pomoću auto-korelacijske funkcije  $R_{XX}$  slučajnog procesa i srednjih vrijednosti.

---

---

---

---

---

---

## Gaussov slučajni proces

- Ako Gaussov proces nije stacionaran onda srednje vrijednosti i auto-korelacijska funkcija ovise o vremenu.

---

---

---

---

---

---

## Gaussov slučajni proces

- Ako je Gaussov proces stacionaran u širem smislu srednja vrijednost je konstantna

$$\bar{\mathbf{X}}_i = E[\mathbf{X}(t_i)] = \text{konst.}$$

dok auto-kovarijancijska i auto-korelacijska funkcija ovise samo o razlikama vremena, a ne o apsolutnom vremenu:

$$C_{xx}(t_i, t_k) = C_{xx}(t_k - t_i)$$

$$R_{xx}(t_i, t_k) = R_{xx}(t_k - t_i)$$

---

---

---

---

---

---

## Primjer

- Neka je dan Gaussov slučajni proces koji je stacionaran u širem smislu i koji ima sljedeću srednju vrijednost i auto-korelacijsku funkciju:

$$\bar{X} = 4$$

$$R_{xx}(\tau) = 25e^{-3|\tau|}$$

- Treba odrediti funkciju gustoće vjerojatnosti trećeg reda za slučajne varijable

$$X(t_i), \quad i=1,2,3, \quad t_i = t_0 + \frac{i-1}{2}$$

---

---

---

---

---

---

## Primjer

$$t_k - t_i = \frac{k-i}{2}, \quad i, k = 1, 2, 3$$

$$\Rightarrow R_{xx}(t_k - t_i) = 25e^{-\frac{3|k-i|}{2}}$$

$$\Rightarrow C_{xx}(t_k - t_i) = 25e^{-\frac{3|k-i|}{2}} - 16$$

---

---

---

---

---

---

## Primjer

- Elementi kovarijancijske matrice dani su kao:

$$C_x = \begin{bmatrix} 25-16 & 25e^{\frac{-3}{2}}-16 & 25e^{\frac{-6}{2}}-16 \\ 25e^{\frac{-3}{2}}-16 & 25-16 & 25e^{\frac{-3}{2}}-16 \\ 25e^{\frac{-6}{2}}-16 & 25e^{\frac{-3}{2}}-16 & 25-16 \end{bmatrix}$$

---

---

---

---

---

---

## Primjer

- Sada kad su poznate srednje vrijednosti i kovarijancijska matrica može se pisati izraz za funkciju gustoće vjerojatnosti trećeg reda za tražene tri slučajne varijable:

$$f_{\mathbf{x}}(x_1, x_2, x_3, t_1, t_2, t_3) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{C}_x^{-1} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})\right\}}{\sqrt{(2\pi)^N |\mathbf{C}_x|}}$$

---

---

---

---

---

---

## Jednostavni diskretni slučajni procesi

- U nastavku ćemo prezentirati dva jednostavna slučajna procesa:
  - Bernoullijev proces,
  - slučajni hod.

---

---

---

---

---

---

## Bernoullijev proces

- Koristi se i izraz Bernoullijev slučajni niz.
- Definicija: niz $\mathbf{X}(n)$ ,  $-\infty < n < \infty$  nezavisnih slučajnih varijabli koje poprimaju dvije vrijednosti +1 i -1 s vjerojatnostima  $p$  i  $1-p$  zove se Bernoullijev proces. Ako je  $p = 0.5$  proces se zove binarni bijeli šum.

---

---

---

---

---

---

## Primjer

- Primjer: Kod linearne prediktivne kodiranja kodira se razlika između ulazne vrijednosti signala i predikcije na temelju prethodnih vrijednosti uzorka signala.
- Ako se ta razlika kodira pomoću jednog bita (delta modulacija) onda se taj niz može modelirati kao Bernoullijev niz.
- Bernoullijev proces je stacionaran i ergodičan.

---

---

---

---

---

---

## Slučajni hod

- Definicija: Slučajni niz definiran izrazom

$$Y(n) = \sum_{k=-\infty}^n X(k), \quad -\infty < n < \infty$$

gdje je  $X(k)$  Bernoullijev proces koji poprima vrijednosti  $+1, -1$  s vjerojatnostima  $p$  i  $1-p$  zove se slučajni hod.

---

---

---

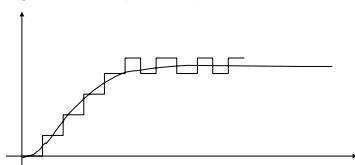
---

---

---

## Primjer slučajnog hoda

- Kod rekonstruiranja Delta moduliranog signala se sumiraju razlike ( $+1$  i  $-1$ ).



---

---

---

---

---

---

## Markovljev proces

- Bernoullijev proces je niz čiji su uzorci nezavisne slučajne varijable.
- To u nekim primjenama dobro opisuje realnu situaciju.
- Takva pretpostavka nije dobra za modeliranje svih binarnih nizova (neki su nizovi zavisni).

---

---

---

---

---

---

## Markovljev proces

- Najjednostavniji oblik zavisnosti je kad vjerojatnost nekog uzorka ovisi o vrijednosti prethodnog uzorka.
- Ovakav tip slučajnog procesa zove se Markovljev slučajni proces.
- To je dobar model za veliki broj praktičnih problema (primjer: nizovi točaka u slici).

---

---

---

---

---

---

## Markovljev proces

- Markovljev proces ne mora biti binaran - može poprimati bilo kakve vrijednosti (kontinuirane ili diskretne).

---

---

---

---

---

---

## Markovljev proces

- Definicija: Slučajni proces je Markovljev proces ako uvjetna distribucija slučajne varijable  $\mathbf{X}(n)$  uz danu prošlost  $n' < n$  ovisi samo o prethodnom uzorku  $\mathbf{X}(n - 1)$

$$f_{\mathbf{X}(n)|\mathbf{X}(n-1), \mathbf{X}(n-2), \dots} (x_n | x_{n-1}, x_{n-2}, \dots) = \\ f_{\mathbf{X}(n)|\mathbf{X}(n-1)} (x_n | x_{n-1})$$

---

---

---

---

---

---

## Markovljev lanac

- Kada  $\mathbf{X}(n)$  poprima vrijednosti iz konačnog skupa vrijednosti onda se takav Markovljev proces zove Markovljev lanac.

---

---

---

---

---

---

## Markovljev lanac

- Definicija: Slučajni proces koji poprima vrijednosti na konačnom skupu je Markovljev lanac ako zadovoljava uvjet:

$$P[(\mathbf{X}(n) = x_n) | (\mathbf{X}(n-1) = x_{n-1}), (\mathbf{X}(n-2) = x_{n-2}), \dots] = \\ P[(\mathbf{X}(n) = x_n) | (\mathbf{X}(n-1) = x_{n-1})]$$

---

---

---

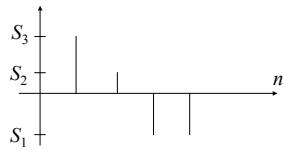
---

---

---

## Markovljev lanac

- Neka je skup mogućih vrijednosti  $\{S_1, S_2, \dots, S_Q\}$
- Kada je  $\mathbf{X}(n) = S_i$  kaže se da je Markovljev lanac u stanju  $i$ .



## Markovljev lanac

- Prijelazne vjerojatnosti definirane su kao:  
$$P_{j|i}(n) = P[(\mathbf{X}(n) = S_j) | (\mathbf{X}(n-1) = S_i)]$$
- Pretpostavimo da su prijelazne vjerojatnosti konstantne (neovisne od  $n$ ) i oblika:  
$$P_{j|i} = P[(\mathbf{X}(n) = S_j) | (\mathbf{X}(n-1) = S_i)]$$
- Tada se sve prijelazne vjerojatnosti mogu prikazati matricom  $\mathbf{P}$  čiji su elementi  $P_{j|i}$

## Markovljev lanac: Primjer

- $Q = 3$  (tri stanja):  
$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{21} & P_{31} \\ P_{12} & P_{22} & P_{32} \\ P_{13} & P_{23} & P_{33} \end{bmatrix}$$
- Gornja matrica naziva se stohastička matrica.

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Markovljev lanac: Primjer

- Često se koristi i prijelazna matrica:

$$\Pi = \mathbf{P}^T = \begin{bmatrix} P_{1|1} & P_{1|2} & P_{1|3} \\ P_{2|1} & P_{2|2} & P_{2|3} \\ P_{3|1} & P_{3|2} & P_{3|3} \end{bmatrix}$$

---

---

---

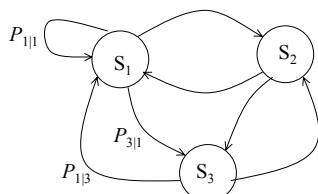
---

---

---

## Markovljev lanac: Primjer

- Ovakav Markovljev lanac može se prikazati i prijelaznim dijagramom stanja:



---

---

---

---

---

---

## Poissonov slučajni proces

- Poissonov proces funkcijom vremena opisuje koliko se je puta neki događaj dogodio.
- Događaj se događa u slučajnim vremenskim trenucima.
- Primjer događaja može biti:
  - dolazak klijenta u banku ili na blagajnu samoposluživanja,
  - kvar u sustavu.

---

---

---

---

---

---

## Poissonov slučajni proces

- Poissonov proces je diskretni slučajni proces zato jer vrijednost poprima diskrete iznose 1,2,3, ...
- Zato se ovaj proces zove i Poissonov proces brojanja.

---

---

---

---

---

---

## Poissonov slučajni proces

- Za definiciju Poissonovog procesa treba ispuniti dva uvjeta:
  - dogadaj se može zbiti samo jednom u svakom infinitezimalno kratkom vremenskom trenutku,
  - trenuci moraju biti statistički nezavisni.

---

---

---

---

---

---

## Poissonov slučajni proces

- Iz ova dva uvjeta slijedi da je broj dogadaja u bilo kojem konačnom intervalu opisan Poissonovom distribucijom:

$$P[X(t) = k] = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}, \quad k = 0,1,2,\dots$$

---

---

---

---

---

---