



Teorija signala

Prof. dr. sc. Hrvoje Babić,
Doc. dr. sc. Damir Seršić
ZESOI - FER



Literatura

- ◆ WEB: <http://ts.zesoi.fer.hr>
- ◆ H. Babić: *Signali i sustavi*, Zavodska skripta FER, Zagreb, 1996.
<http://sis.zesoi.fer.hr>, 2002.
- ◆ F. de Coulon: *Signal Theory and Processing*, Artech House, Dedham, 1986.
- ◆ L.E. Franks: *Signal Theory*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1969.
- ◆ A. Papoulis: *Signal Analysis*, McGraw-Hill, 1977.



Prvi dio: osnove

- ◆ Klase signala i sustava
 - ◆ Vremenski kontinuirani i diskretni
- ◆ Bezm memorijski sustavi
 - ◆ Funkcijski i relacijski blokovi
- ◆ Memorijski sustavi
 - ◆ Memorijske i predikcijske operacije
 - ◆ Model s varijablama stanja
- ◆ Odziv linearnih sustava



Signal

- ◆ Signal: fenomen koji nosi neku informaciju.
- ◆ Signale - vremenske funkcije označavat ćemo malim slovima - x , v , u .
- ◆ Trenutna vrijednost: $u(t)$, $t \in \mathbf{R}$.
- ◆ Ako je t ograničen na $\mathbf{T} \subset \mathbf{R}$, onda je signal u preslikavanje $u: \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{U}$, gdje je \mathbf{T} domena, a \mathbf{U} kodomena od u .
 - ◆ $u = \{(t, u(t)) \mid t \in \mathbf{T}\}$.



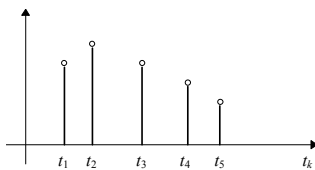
Klasa signala

- ◆ Neka je \mathcal{U} skup svih signala iz \mathbf{T} na \mathbf{U} .
- ◆ Tada je signal u varijabla iz klase signala \mathcal{U} .
- ◆ Razlikujemo:
 - ◆ kodomena od $u(t)$ je \mathbf{U} (skup brojeva),
 - ◆ kodomena od u je \mathcal{U} (skup funkcija).



Kontinuirani i diskretni signali

- ◆ Ako je domena \mathbf{T} neprebrojiv i neprekinut (kontinuiran) skup, onda se radi o vremenski kontinuiranom signalu.
- ◆ Ako je domena \mathbf{T} prebrojiv skup trenutaka $\{t_0, t_1, t_2, \dots, t_k\}$, onda je to vremenski diskretni signal.





Diskretna vremenska varijabla

- ◆ Trenutke t_k možemo poredati u rastući niz

$$t_0 < t_1 < t_2 < \dots,$$
- ◆ tj. uvesti indeksaciju skupa \mathbf{T} , $t_k \in \mathbf{T}$.
- ◆ Trenutke pridružujemo skupu cijelih brojeva

$$t: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R}.$$
- ◆ t_k ili $t(k)$ je vrijednost t na cijelom broju $k \in \mathbf{Z}$, gdje je k indeks ili korak niza.
- ◆
$$t = \{(k, t_k) \mid k \in \mathbf{K}\}; \quad \mathbf{K} \subseteq \mathbf{Z}.$$



Diskretna vremenska varijabla...

- ◆ Nizove vrem. trenutaka označavamo kao

$$\dots, t_{-1}, t_0, t_1, t_2, \dots \quad \text{ili}$$

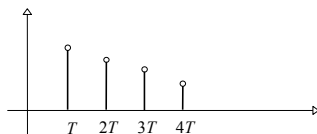
$$\{t(k)\}, k \in \mathbf{Z} \quad \text{ili}$$

$$\{t_k\}, k \in \mathbf{Z}$$
- ◆ Najjednostavniji primjer: aritmetički niz
- ◆
$$t = \{t_0, t_0 + T, t_0 + 2T, \dots\},$$
- ◆ gdje je T konstanta (kvant vremena).



Jednolika diskretizacija vremena

- ◆ $t_k = T k \quad k \in \mathbf{Z}.$





Amplitude signala

- ◆ Ako je područje amplituda signala $\mathbf{U} \subset \mathbf{R}$, neprebrojiv i kontinuiran skup, signal je nekvantiziran ili analogan.
- ◆ Ako je područje amplituda signala prebrojiv skup $\mathbf{U} = \{\dots, u_{-2}, u_{-1}, u_0, u_1, u_2, \dots\}$, signal je kvantiziran.

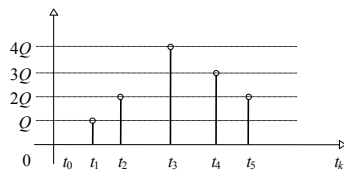


Diskretizacija amplitude

- ◆ Indeksacija amplituda u_n je preslikavanje $u: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{U}$,
- ◆ $u = \{u_n \mid n \in \mathbf{N}\}, \mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z}$.
- ◆ Najjednostavniji primjer: aritmetički niz
- ◆ $u = \{\dots, a_0 - Q, a_0, a_0 + Q, a_0 + 2Q, \dots\}$,
- ◆ gdje je Q konstanta (kvant amplitude).
- ◆ $u_n = Q n \quad n \in \mathbf{N}$.



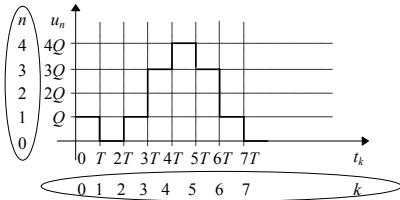
Diskretizacija amplitude...





Diskretizacija...

- ◆ Jednoliko diskretiziran signal (po vremenu i po amplitudi) može se izraziti samo skupovima indeksa k i n (uz poznate T i Q).
- ◆ $u = \{n(k)\}$, $k \in \mathbf{K} \subseteq \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z}$.

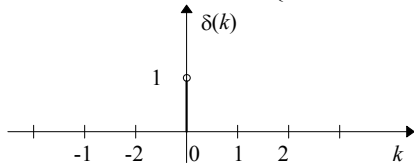




Osnovni diskretni signali (nizovi)

Jedinični niz (Niz s jediničnim članom ili uzorkom, Kroneckerov delta, δ -niz)

$$\delta = \dots, 0, 0, \underline{1}, 0, 0, \dots \quad \delta(k) = \begin{cases} 1 & \text{za } k=0, k \in \mathbf{Z} \\ 0 & \text{za } k \neq 0 \end{cases}$$

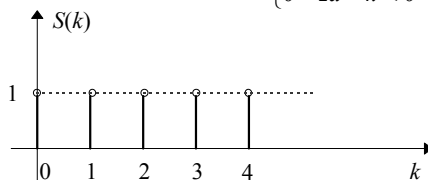




Osnovni diskretni signali (nizovi)

Jedinična stepenica (Heavisideov niz)

$$S = \dots, 0, 0, \underline{1}, 1, 1, \dots \quad S(k) = \begin{cases} 1 & \text{za } k \geq 0, k \in \mathbf{Z} \\ 0 & \text{za } k < 0 \end{cases}$$

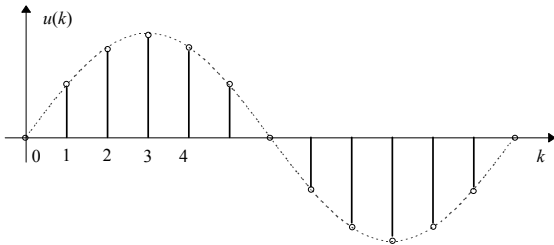




Osnovni diskretni signali (nizovi)

Sinusni niz

$u(k) = U \cos(\omega T_0 k + \zeta)$, gdje je ω frekvencija dodirnice





Osnovni diskretni signali (nizovi)

$$u(k) = U \cos(\Omega k + \zeta), \quad k \in \mathbb{Z}$$

U - amplituda ζ - faza

$\Omega = \omega T_0$ - korak argumenta u radianima analogan frekvenciji



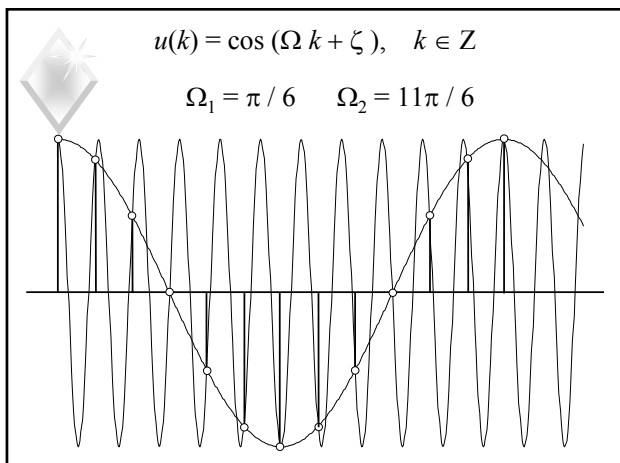
Svojstva sinusnog niza


Za $\Omega = 2\pi - \Delta$ izlazi

$$u(k) = \cos(2\pi - \Delta)k = \cos(-\Delta k) = \cos \Delta k$$

Iz raspoloživog niza se ne može razlikovati
da li je frekvencija dodirnice

$$\Omega_1 = 2\pi - \Delta \quad \text{ili} \quad \Omega_2 = \Delta$$




 **Svojstva sinusnog niza**

Vidi se da se iz ovog niza ne može razlikovati frekvencija Ω_1 od bilo koje

$$\Omega_n = \Omega_1 + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z} \text{ jer je}$$

$$\cos[(\Omega_1 + 2n\pi)k] = \cos(\Omega_1 k + 2n\pi k) = \cos(\Omega_1 k) \quad n, k \in \mathbb{Z}$$

Da bi se Ω mogao odrediti jednoznačno iz niza moramo biti sigurni da je $|\Omega| < \pi$, odnosno $\omega < \pi / T_0$ ili $2f < 1 / T_0$.

 **Operacije na signalu, sustav**

- ◆ Promjene na signalu se događaju kad signal prolazi kroz medij ili sustav.
- ◆ Sustav je cjelina sastavljena od međusobno povezanih objekata gdje svojstva objekata i njihovo međudjelovanje određuju svojstva i vladanje cjeline.
- ◆ Multidisciplinarni problem: odrediti, podesiti, predvidjeti vladanje sustava, ili pak realizirati sustav željenih svojstava.



Operacije na signalu

- ◆ Kvantitativna analiza sustava u različitim disciplinama vodi na iste matematičke postupke – teoriju signala i sustava.
- ◆ Važne operacije: modificiranje vremenske i amplitudne osi signala.
- ◆ Radi jednoznačnosti koristit ćemo funkcije koje imaju inverziju -
monotono rastuće ili padajuće funkcije.



Transformacija vremenske osi

- ◆ Neka funkcija τ preslikava staru os u novu
- ◆ $\tau: \mathbf{T}_s \rightarrow \mathbf{T}_n$.
- ◆ Novu vrijednost signala računamo kao
- ◆ $u_n(t) = u_s(\tau^{-1}(t)), \quad t \in \mathbf{T}_n$.
- ◆ Primjer (stezanje ili rastezanje signala):

$$\tau(t) = t / a \quad t \in \mathbf{T}_s$$

$$\tau^{-1}(t) = a t \quad t \in \mathbf{T}_n$$



Transformacija područja

- ◆ Neka je \mathbf{T} os signala u_s . Imamo
- ◆ $u_s: \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{U}_s$, gdje je \mathbf{U}_s područje signala.
- ◆ Preslikamo “staro” područje \mathbf{U}_s u novo \mathbf{U}_n :
- ◆ $\varphi: \mathbf{U}_s \rightarrow \mathbf{U}_n$.
- ◆ Dobili smo novi signal u_n :
- ◆ $u_n(t) = \varphi(u_s(t)), \quad t \in \mathbf{T}$.
- ◆ Pri tom funkcija φ mora imati inverziju (ako želimo restaurirati stari signal).



Preslikavanje signala

- ◆ Jednostavno preslikavanje - kompozicija funkcija:
- ◆ $v(t) = f(u(t)), \quad v = f(u), \quad u \in \mathcal{U}, v \in \mathcal{V}.$
- ◆ Trenutna vrijednost preslikava se u trenutnu.
- ◆ Složenije preslikavanje - operator pridružuje signalu drugi signal:
- ◆ $v = F(u), \quad u \in \mathcal{U}, v \in \mathcal{V}.$



Složeno preslikavanje...

- ◆ Neka F preslikava signal u iz intervala $[t_1, t_2]$ u signal v u intervalu $[t_1, t_2]$.
- $$v_{[t_1, t_2]} = F(u_{[t_1, t_2]})$$
- ◆ Trenutna vrijednost $v(t)$, uz $t \in [t_1, t_2]$ zavisi od svih trenutnih vrijednosti $u(\tau)$ iz intervala $\tau \in [t_1, t_2]$!



Složeno preslikavanje...

- ◆ Trenutna vrijednost $v(t)$ može se izraziti kao:
- $$v(t) = F(u_{[t_1, t_2]}, t)$$
- ◆ gdje je F funkcional koji funkciji u na intervalu $[t_1, t_2]$ pridružuje broj $v(t)$.
 - ◆ Posebice su zanimljive 2 mogućnosti:
 - ◆ $v(t)$ ovisi od segmenta $[t_1, t)$ - prije t , ili
 - ◆ $v(t)$ ovisi od segmenta $(t, t_2]$ - poslije t .
 - ◆ Trenutci t_1, t_2 mogu biti i u beskonačnosti.



Vremenski kontinuirani sustavi

- Primjer funkcionala je blok koji povezuje:

$$\dot{x} \text{ i } x$$

- Integrator:

$$u \longrightarrow \boxed{\int} \longrightarrow y \quad \left| \quad y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau$$



Vremenski kontinuirani sustavi

- Integrator je memorijski element.
- Za određivanje $y(t)$ potrebno je $y(t_0)$ i $u_{[t_0, t]}$.
- $y(t)$ je funkcional od $u_{[t_0, t]}$.
- $y(t_0)$ je stanje integratora i sadrži svu prošlost do t_0 .
- Kod integratora izlaz je ujedno i stanje.



Memorijske i predikcijske operacije diskretnog sustava

Pomak niza - jedinični pomak daje iz ulaznog niza, niz pomaknut za jedan korak.

unaprijed (predikcija) unatrag (kašnjenje i pamćenje)

$$u \longrightarrow \boxed{E} \longrightarrow y \quad u \longrightarrow \boxed{E^{-1}} \longrightarrow y$$

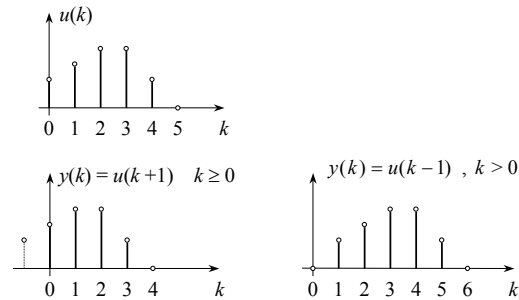
$$y = E u \text{ ili } \{y(k)\} = E \{u(k)\} \quad y = E^{-1} u \text{ ili } \{y(k)\} = E^{-1} \{u(k)\}$$

$$y(k) = (Eu)(k) \quad y(k) = (E^{-1}u)(k)$$

$$y(k) = u(k+1) \quad k \geq 0, \quad y(k) = u(k-1) \quad k > 0.$$

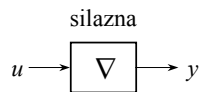
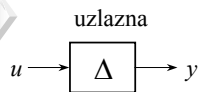


Operacija pomaka niza unaprijed traži nekauzalan sustav pa je neostvariva.
Zato se u sustavima služimo redovito jedinicama za kašnjenje, odnosno operacijom E^{-1} .





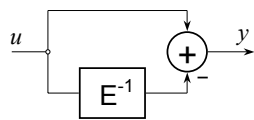
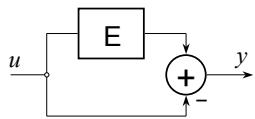
Diferencija niza



$$y = \Delta u \text{ ili } \{y(k)\} = \Delta \{u(k)\} \quad y = \nabla u \text{ ili } \{y(k)\} = \nabla \{u(k)\}$$

$$y(k) = (\Delta u)(k) = u(k+1) - u(k) \quad y(k) = (\nabla u)(k) = u(k) - u(k-1)$$

$$\{y(k)\} = (E - 1)\{u(k)\} \quad \{y(k)\} = (1 - E^{-1})\{u(k)\}$$





Diferencija višeg reda

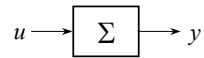
$$\Delta^n \{u(k)\} = (E - 1)^n \{u(k)\} = \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} E^{n-r} \{u(k)\}$$

$$\nabla^n \{u(k)\} = (1 - E^{-1})^n \{u(k)\} = \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} E^{-r} \{u(k)\}$$

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$



Akumulacija niza



Antidiferencijski operator Δ^{-1} daje niz

$$\{y(k)\} = \Delta^{-1}\{u(k)\} \text{ takav da je } \Delta\{y(k)\} = \{u(k)\}$$

Može se pokazati da vrijedi $\Delta\left\{\sum_{j=0}^{k-1} u(j) + K\right\} = \{u(k)\}$

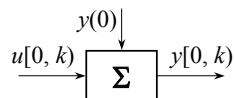
Za slučaj kauzalnih signala $\left(\sum_{j=0}^k u(j) + K\right) - \left(\sum_{j=0}^{k-1} u(j) + K\right) = u(k)$

Prema tome

$$\Delta^{-1}\{u(k)\} = \left\{\sum_{j=0}^{k-1} u(j) + K\right\} \quad y(k) = \begin{cases} y(0), & k = 0 \\ y(0) + \sum_{j=0}^{k-1} u(j), & k > 0 \end{cases}$$



Uzlazni akumulator



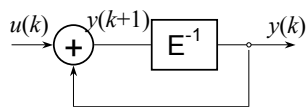
$$y(k+1) - y(k) = u(k)$$

$$y(k+1) = u(k) + y(k)$$

$$y(1) = u(0) + y(0) \quad \text{Moramo poznavati } y(0)$$

$$y(2) = u(1) + y(1) = u(1) + u(0) + y(0)$$

$$y(k) = \sum_{j=0}^{k-1} u(j) + y(0), \quad k > 0 \quad \text{diskretni analogon integratora}$$



$$y(k+1) = y(k) + u(k)$$

$$y[0, k] = F(y(0), u[0, k])$$



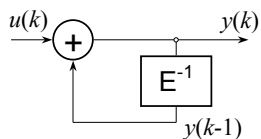
Silazni akumulator

Silazni antidiferencijski operator ∇^{-1} daje niz

$$\{y(k)\} = \nabla^{-1}\{u(k)\} \text{ takav da je } \nabla\{y(k)\} = \{u(k)\}$$

$$\nabla^{-1}\{u(k)\} = \left\{\sum_{j=0}^k u(j) + K\right\}$$

$$y(k) = y(-1) + \sum_{j=0}^{k-1} u(j), \quad k \geq 0$$

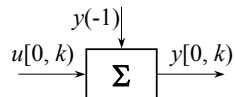


$$y(k) = y(k-1) + u(k)$$

$$y[0, k] = F(y(-1), u[0, k])$$



$$\begin{aligned}y(k) - y(k-1) &= u(k) \\y(k) &= u(k) + y(k-1) \\y(0) &= u(0) + y(-1) \quad \text{Moramo poznavati } y(-1) \\y(1) &= u(1) + u(0) + y(-1) \\y(2) &= u(2) + u(1) + u(0) + y(-1) \\y(k) &= \sum_{j=0}^{k-1} u(j) + y(-1)\end{aligned}$$

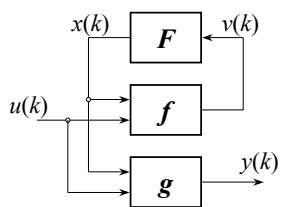




Model vrem. diskretnog sustava

Bezmemorijski sustav $u \rightarrow \boxed{f} \rightarrow y \quad y(k) = f[u(k)]$

Memorijski sustav $y(k) = F(x(k_0), u(k_0, k])$ za $k > k_0$



Bezmemorijski dio:

$$v(k) = f(x(k), u(k))$$

$$y(k) = g(x(k), u(k))$$

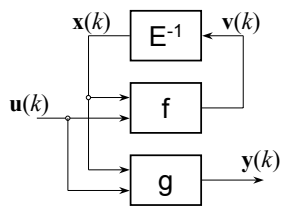
Memorijski dio:

$$x(k) = F(x(k_0), v(k_0, k])$$



Posebno važan memorijski element u memorijskom podsustavu je element jediničnog kašnjenja.

$\mathbf{u}(k), \mathbf{x}(k), \mathbf{y}(k)$ - vektori sustava



jednadžbe sustava

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k))$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k))$$



Veza s kontinuiranim sustavom u slučaju da se derivacija aproksimira s diferencijom

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \cong \frac{\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}(k)}{T} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k))$$

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(k) + T\mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k))$$

linearni sustav

$$\frac{\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}(k)}{T} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{x}(k+1) = (\mathbf{I} + T\mathbf{A})\mathbf{x}(k) + T\mathbf{B}\mathbf{u}(k)$$

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_d\mathbf{x}(k) + T\mathbf{B}\mathbf{u}(k)$$



Operacije među signalima

- ◆ Djelovanje više signala na jedan rezultirajući može se opisati funkcijom:

$$v(t) = f(u_1(t), u_2(t), u_3(t), \dots).$$

- ◆ Općenito, to je nelinearna funkcija, npr.

$$v(t) = [u_1(t)]^{u_2(t)},$$

- ◆ ili linearna, npr.

$$v(t) = \alpha u_1(t) + \beta u_2(t).$$



Operacije među signalima

- ◆ Elementarne operacije - ne mogu se dalje razlagati.
- ◆ Važne elementarne operacije:
 - ◆ zbrajanje $v = u_1 + u_2$
 - ◆ množenje $v = u_1 u_2$
- ◆ Razlaganje f na elementarne operacije - Taylorov red s konačnim brojem članova.
- ◆ Funkcionalni: linearni ili nelinearni.



Osnovne operacije na nizovima i elementi diskretnog sustava

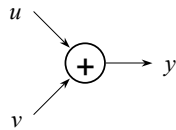
Zbrajanje nizova

Zbroj dva niza $y = u + v$ ili

$$\{y(k)\} = \{u(k)\} + \{v(k)\}$$

je niz s općim članom

$$y(k) = u(k) + v(k) \text{ za svaki } k \in \mathbb{Z}.$$



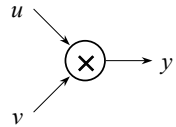
Produkt nizova

Produkt dva niza $y = u \cdot v$ ili

$$\{y(k)\} = \{u(k)\} \{v(k)\}$$

je niz s općim članom

$$y(k) = u(k) \cdot v(k) \text{ za svaki } k \in \mathbb{Z}.$$





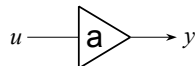
Osnovne operacije na nizovima i elementi diskretnog sustava

Množenje s konstantom

$y = a u$ ili

$$\{y(k)\} = a \{u(k)\} = \{a u(k)\}$$

$y(k) = a u(k)$ za svaki $k \in \mathbb{Z}$.

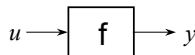


Funkcijski blok

$y = f(u)$ ili

$$\{y(k)\} = f[\{u(k)\}]$$

$y(k) = f[u(k)]$ za svaki $k \in \mathbb{Z}$.





Klasifikacija sustava

- ◆ Bezm memorijski ili trenutni
 $y(t) = f(t, u(t))$,
- ◆ memorijski ili kauzalni
 $y(t) = F(t, u_{(-\infty, t]})$,
- ◆ prediktivni (antici pativni) ili antikauzalni
 $y(t) = F(t, u_{[t, \infty)})$,
- ◆ memorijsko-prediktivni ili nekauzalni
 $y(t) = F(t, u_{(-\infty, \infty)})$.
- ◆ Nekaualni sustavi često se dobivaju pri sintezi sustava, uslijed idealiziranih zahtjeva.



Spajanje sustava

- ◆ Sustav s više ulaza i izlaza može se jednostavno razložiti na više sustava s više ulaza, ali samo s po jednim izlazom.
- ◆ Dva i više objekata ili podsustava mogu se spojiti tako da zajedno čine jedan složeni sustav.
- ◆ Sustavi od kojih je sastavljen složeni sustav zovu se podsustavi.



Pravila spajanja

- ◆ Izlazi iz blokova se ne spajaju međusobno.
- ◆ Svaki ulaz bloka spaja se na izlaz nekog bloka ili je ulaz u spojeni složeni sustav. Svi ulazi podsustava su angažirani.
- ◆ Izlaz bloka može biti izlaz složenog sustava. Najmanje jedan izlaz podsustava je izlaz spojenog sustava.



Kontinuirani sustavi bez memorije

- ◆ Izlaz u trenutku t ovisi samo o vrijednosti ulaznog signala u trenutku t
- ◆ Elementi sustava prikazani funkcijskim blokom
- ◆ Funkcijski blok opisan funkcijom

$$y(t) = f(u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t))$$

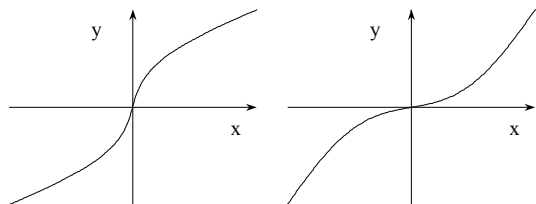
$y(t), u_i(t) \in R$

```
graph LR; u1 --> f["f(.,.,.)"]; u2 --> f; u3 --> f; f --> y;
```



Funkcijski blok s jednim ulazom i jednim izlazom

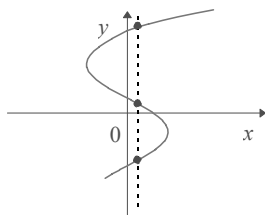
- ◆ Monotone funkcije imaju inverziju





Relacijski blok

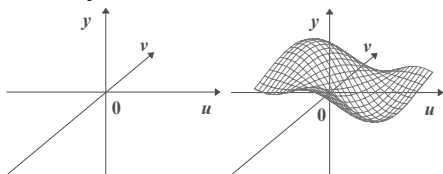
- ◆ Relacija - za jednu apcisu imamo više vrijednosti ordinata





Funkcijski blok s više ulaza

- ◆ u, v - ulazne varijable
- ◆ y - izlazna varijabla
- ◆ Skup krivulja $y=f(u,v)$, uz parametar v





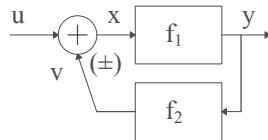
Eksplisitni i implicitni sustavi

- ◆ Dvije grupe sustava bez memorije
 - ◆ eksplisitni sustavi
 - ◆ implicitni sustavi
- ◆ Podjela prema tome da li signal na svom putu kroz sustav ne čini petlju
- ◆ Eksplisitni sustav - nema petlje, spojna lista sustava može se sortirati.
- ◆ Implicitni sustav - ima jednu ili više petlji, spojna lista sustava se ne može sortirati.



Primjer implicitnog sustava

Sustav s pozitivnom ili negativnom povratnom vezom:



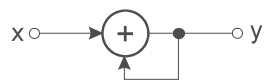
$$u = x \mp v = f_1^{-1}(y) \mp f_2(y)$$

$$y = f(u); \quad f = (f_1^{-1} \mp f_2)^{-1}$$



Implicitni sustavi

- ◆ Implicitni sustavi mogu biti i relacijski
- ◆ Rješenje ne mora postojati
- ◆ Primjer: zbrajalo s povratnom vezom



$$y = x + y$$

- $x=0, y=0$
- $x \neq 0$, nema rješenja



Linearnost sustava

◆ Definicija:

- ◆ Sustav s ulazom \mathbf{x} i izlazom y je linearan ako zadovoljava uvjet

$$f(a \cdot \mathbf{x}_1 + b \cdot \mathbf{x}_2) = a \cdot f(\mathbf{x}_1) + b \cdot f(\mathbf{x}_2)$$

za sve realne vrijednosti $a, b, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$, gdje su \mathbf{x}_1 i \mathbf{x}_2 bilo koje dvije vrijednosti vektora ulaza.



Linearnost sustava ...

- ◆ Složeni sustav koji zadovoljava uvjet linearnosti ne mora nužno biti sastavljen od elemenata koji su linearni.

◆ Primjer:



- ◆ Elementi sustava su nelinearni, a sustav je linearan:
 - ◆ sustav nije strukturno linearan.
- ◆ Svaki sustav koji je strukturno linearan (svi elementi linearni) linearan je i operacijski.



Linearnost sustava ...

- ◆ Linearni sustav s n ulaza karakterizira se ulazno izlaznom relacijom:

$$y = \sum_{i=1}^n a_i x_i = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

- ◆ Linearni sustav s n ulaza može se se promatrati kao suma n identičnih sustava (superpozicija)

$$y = f(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, 0, 0) + f(0, x_2, 0) + f(0, 0, x_3)$$



Linearnost sustava ...

- ◆ Sustav s m ulaza i n izlaza

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$



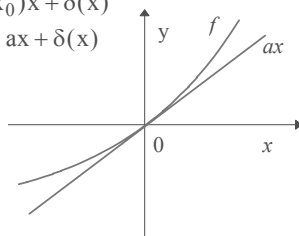
Aproksimacija nelinearnog sustava linearnim

- ◆ Razvoj nelinearne funkcije $f(x)$ u Taylorov red u okolini točke x_0

$$f(x_0 + x) = f(x_0) + f'(x_0)x + \delta(x)$$

$$y = f(x_0 + x) - f(x_0) = ax + \delta(x)$$

- ax - linearni član
- $\delta(x)$ - odstupanje od linearnosti





Linearizacija funkcijskog bloka s više ulaza i izlaza

- ◆ Taylorov razvoj za sve izlaze kao funkcije više varijabli

$$y_i = f_i(u_1, u_2, \dots, u_m), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

razvoj daje

$$y_i = f_i(u_{10}, u_{20}, \dots, u_{m0}) + \frac{\partial f_i}{\partial u_1} \Delta u_1 + \frac{\partial f_i}{\partial u_2} \Delta u_2 + \dots$$

$$+ \frac{\partial f_i}{\partial u_m} \Delta u_m + \text{članovi višeg reda}$$



Linearizacija funkcijskog bloka s više ulaza i izlaza ...

- ◆ Napisano pomoću Jacobijeve matrice

$$\Delta \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \\ \vdots \\ \Delta y_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & & \frac{\partial f_2}{\partial u_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_r}{\partial u_1} & \dots & & \frac{\partial f_r}{\partial u_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \\ \vdots \\ \Delta u_m \end{bmatrix} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u}$$

- ◆ U okolini točke \mathbf{y}_0 vrijedi $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$



Model s varijablama stanja

- Sustav je n-tog reda ako treba n varijabli stanja za potpun opis njegovog vladanja.
- Pretpostavimo sustav s više varijabli ulaza, izlaza i stanja:

$$\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_m]^t \quad \mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$$

$$\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_r]^t \quad \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^r$$

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^t \quad \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$$

- Stanje u trenutku t se može izraziti s:

$$\mathbf{x}(t) = \varphi(t, t_0, \mathbf{x}(t_0), \mathbf{u}(t_0, t))$$

φ je (jednoznačna) vektorska funkcija.



Model s varijablama stanja

- Izlaz ovisi o stanju i pobudi:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$$

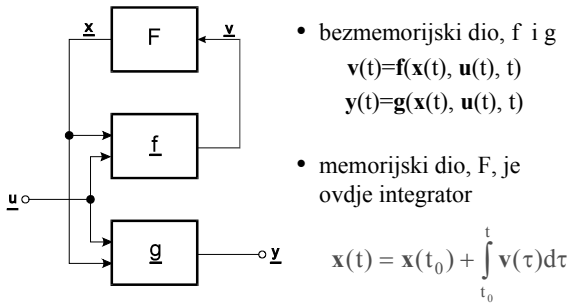
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(t, t_0, \mathbf{x}(t_0), \mathbf{u}(t_0, t])$$

- Vremenski kontinuiran sustav s varijablama stanja možemo rastaviti na dva podsustava:

- memorijski,
- bezmemorijski.



Model s varijablama stanja





Model linearnog kontinuiranog sustava

- Sustav je linearan ako je funkcija $\mathbf{v} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ linearna, tj.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)$$

- Ako su A i B konstantne, sustav je linearan i vremenski nepromjenjiv

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$



Model linearnog kontinuiranog sustava

- Nepobuđen linearan sustav (tj. $\mathbf{u}(t) = 0$, za sve t) ima homogenu diferencijalnu jednačbu

- vremenski promjenjiv sustav:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)$$

- vremenski stalan sustav:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$$



Signali i sustavi

Opći linearni sustavi



Primjeri kontinuiranih signala

- ◆ Za analizu linearnih sustava najveće značenje imaju:
 - ◆ kompleksna eksponencijala,
 - ◆ Diracova δ -funkcija.



Kompleksna eksponencijala

- ◆ $u(t) = Ue^{st}$; $s, U \in \mathbb{C}$.
- ◆ Ovisno o kompleksnoj frekvenciji $s = \sigma + j\omega$ imamo slučajeve:
 - ◆ konstantnog ($s = 0$),
 - ◆ eksponencijalnog ($\omega = 0$)
 - ◆ harmonijskog signala ($\sigma = 0$).
- ◆ Pobuda kompleksnom eksponencijalom koristi se za analizu vladanja sustava u frekvencijskoj domeni.



Diracova δ -funkcija

- ◆ Diracova δ -funkcija

$$\delta(t) = 0, \quad t \neq 0; \quad \text{i} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

- ◆ $\delta(t)$ – singularna funkcija.

- ◆ Regularne + singularne funkcije =
poopćene funkcije ili distribucije.

$$\delta(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \varphi(t) dt = \varphi(0).$$

Diagram showing the relationship between the Dirac delta function and its properties:

- Delta distribucija (points to $\delta(\varphi)$)
- Singularna delta funkcija (points to $\delta(t)$)
- Ispitna funkcija, regularna u nuli (points to $\varphi(t)$)
- Skalar (points to $\varphi(0)$)



Impulsni odziv i konvolucija

- ◆ Diracovu funkciju nazivamo i jedinični impuls.
- ◆ Poznavanje impulsnog odziva nekog sustava je dovoljno za potpun opis njegovog vladanja.
- ◆ Odziv linearnog vremenski stalnog sustava na opću pobudu opisuje se konvolucijskim integralom:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) u(\tau) d\tau,$$

gdje je $h(t)$ odziv sustava na jedinični impuls.



Linearne operacije na signalima

- ◆ Složeni signali se mogu predstaviti linearnom kombinacijom elementarnih signala:

$$u(t) = \sum_{k=1}^N a_k u_k(t),$$

- ◆ gdje su a_k – realne ili kompleksne konstante, a $\{u_k(t)\}$ prebrojiv skup elementarnih funkcija.
- ◆ Složeni se signali mogu predstaviti također i neprebrojivim skupom elementarnih funkcija:

$$v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\lambda) u(t, \lambda) d\lambda, \quad \lambda - \text{kontinuiran.}$$



Linearne operacije na signalima

- ◆ *Fourierov* red predstavlja primjer linearne kombinacije eksponencijala, čije frekvencije su aritmetički niz:

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}.$$

- ◆ Primjer neprebrojivog skupa je *Fourierov* integral:

$$v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\lambda) e^{j\lambda t} d\lambda.$$



Primjer

- ◆ Predstavimo signal integralom delta funkcija

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\lambda) \delta(t - \lambda) d\lambda, \quad a(\lambda) = u(\lambda).$$

- ◆ Djelovanje nekog stalnog linearnog sustava na signal u možemo opisati linear. operatorom F :

$$F[u(t)] = F\left[\int_{-\infty}^{\infty} u(\lambda) \delta(t - \lambda) d\lambda\right] = \int_{-\infty}^{\infty} u(\lambda) F[\delta(t - \lambda)] d\lambda,$$

$$F[u] = y, \quad F[\delta] = h,$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\lambda) h(t - \lambda) d\lambda \longrightarrow \text{konvolucijski integral !}$$



Harmonijska pobuda sustava

- ◆ Korisna za analizu linearnog nepromjenjivog sustava u frekvencijskoj domeni:

$$u(t) = Ue^{j\omega t} \rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) Ue^{j\omega\tau} d\tau.$$

- ◆ Nakon supstitucije $t - \tau = \vartheta$ i sređivanja izlazi:

$$y(t) = H(\omega) Ue^{j\omega t}, \quad H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\vartheta) e^{-j\omega\vartheta} d\vartheta.$$

- ◆ Harmonijska pobuda daje harmonijski odziv – nema izobličenja ni viših harmonika.



Harmonijska pobuda sustava

- ◆ Veličina $H(\omega)$ je kompleksan broj koji nam pokazuje za svaku frekvenciju ω :
 - ◆ koliko se promijenila amplituda harmonijskog odziva
 - ◆ kakav je fazni pomak u odnosu na harmonijsku pobudu $u(t)$.
- ◆ $A(\omega) = |H(\omega)|$ je frekv. karakteristika amplitude,
- ◆ $\varphi(\omega) = \arg H(\omega)$ je frekv. karakteristika faze.
- ◆ Izraz za $H(\omega)$ predstavlja *Fourierov* integral ili *Fourierov* spektar impulsnog odziva sustava $h(t)$.



Pobuda sustava kompleksnom eksponencijalom

- ◆ Općenito, pobuda kompleksnom eksponencijalom opet daje kompleksnu eksponencijalu:

$$u(t) = Ue^{st} \rightarrow y(t) = H(s)Ue^{st},$$

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\vartheta) e^{-s\vartheta} d\vartheta.$$
- ◆ To nam kazuje da je kompleksna ksponecijala svojstvena funkcija (*eigenfunction*) konvolucije!



Pobuda sustava kompleksnom eksponencijalom

- ◆ Izraz za $H(s)$ je ujedno izraz za dvostranu *Laplaceovu* transformaciju impulsnog odziva h .

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\vartheta) e^{-s\vartheta} d\vartheta.$$
- ◆ Izraz za jednostranu *Laplaceovu* transformaciju dobivamo uz kauzalnu pobudu $u(t) = Ue^{st} \cdot \mu(t) !!!$
