

## Spektralne karakteristike slučajnih procesa



Prof. dr. sc. Hrvoje Babić  
Doc. dr. sc. Damir Seršić

## Spektar snage signala

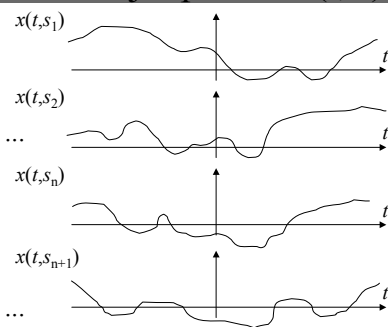
- Fourierova transformacija:  $x(t) \rightarrow X(\omega)$ .

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} dt$$

- Uvjet konvergencije – apsolutna integrabilnost  $x(t)$ :

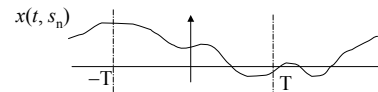
$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

## Slučajni proces $X(t, s)$



## Spektar snage signala

- Realizacija beskonačnog trajanja: integral divergira.
- Uzmemo konačni segment  $[-T, T]$  jedne realizacije:



$$x_T(t, s_n) = \begin{cases} x(t, s_n) & -T < t < T \\ 0 & \text{drugdje} \end{cases}$$

- $T$  – konačan  $\Rightarrow$  integral konvergira.

- Fourierov spektar postoji:

$$X_T(\omega) = \int_{-T}^T x(t) e^{-j\omega t} dt$$

## Energija i snaga signala

- Energija u intervalu  $2T$ :

$$\mathcal{E}(T) = \int_{-T}^T x^2(t) dt.$$

- Snaga:

$$P(T) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt$$

= energija u jedinici vremena.

## Gustoća spektra snage signala

- Parsevalov teorem za energije:

$$\mathcal{E}(T) = \int_{-\infty}^{\infty} x_T^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X_T(\omega)|^2 d\omega.$$

- Snaga = energija / vrijeme:

$$P(T) = \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} x_T^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{|X_T(\omega)|^2}_{\text{gustoća sp. snage}} \frac{1}{2T} d\omega.$$

- Veći  $T \Rightarrow$  točniji izraz za snagu jedne realizacije  $x(t, s_n)$  slučajnog procesa  $X(t, s)$ .

## Gustoća spektra snage

- Do sada: jedna realizacija  $x(t, s_n)$  iz ansambla  $X(t, s)$ .
- $P(T)$  fluktuirala za različite slučajne varijable  $s_n$ .
- Neka je:

$$P_n = \lim_{T \rightarrow \infty} P_n(T), \quad P_{XX} = E[P_n]$$

- slijedi:

$$P_{XX} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E[X_T^2(t)] dt.$$

= srednja snaga slučajnog procesa  $X(t)$ .

## Gustoća spektra snage

- Parsevalov teorem:

$$P_{XX} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[|X_T(\omega)|^2]}{2T} d\omega.$$

- Srednja snaga procesa  $X(t)$  je dana vremenskom srednjom vrijednošću  $A\{\cdot\}$  drugog momenta:

$$P_{XX} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E[X^2(t)] dt \\ = A\{E[X^2(t)]\}.$$

## Gustoća spektra snage

- Za stacionarni proces:

$$P_{XX} = E[X^2(t)] = \overline{X^2} = konst.$$

- Nadalje, srednja snaga procesa može se izračunati i integracijom gustoće spektra snage:

$$P_{XX} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega) d\omega,$$

$$S_{XX}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[|X_T(\omega)|^2]}{2T}.$$

## Svojstva gustoće spektra snage

1.)  $S_{XX}(\omega) \geq 0$ ,

2.)  $S_{XX}(-\omega) = S_{XX}(\omega)$ ,

3.)  $S_{XX}(\omega)$  – realan.

- Standardna devijacija spektra snage  
=> efektivna širina pojasa.

$$\Omega^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_{XX}(\omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega) d\omega}.$$

## Autokorelacija - spektar snage

$$S_{XX}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[X_T^*(\omega) \cdot X_T(\omega)]}{2T} \\ = \lim_{T \rightarrow \infty} E\left[\frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t_1) e^{j\omega t_1} dt_1 \cdot \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t_2) e^{-j\omega t_2} dt_2\right] \\ = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{-T}^T \underbrace{E[X(t_1) X(t_2)]}_{R_{XX}(t_1, t_2)} e^{-j\omega(t_2 - t_1)} dt_2 dt_1$$

- $R_{XX}(t_1, t_2)$  – autokorelacijska funkcija procesa  $X(t)$ .

## Autokorelacija - spektar snage

- Uz  $t = t_1$  i  $\tau = t_2 - t_1$  izlazi:

$$S_{XX}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T-t} \int_{-T}^T R_{XX}(t, t+\tau) dt e^{-j\omega\tau} d\tau$$

- Vanjski integral ne ovisi o T, već samo o  $\tau$ :

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T R_{XX}(t, t+\tau) dt \right\} e^{-j\omega\tau} d\tau$$

vremenska srednja vrijednost autokorelacijske funkcije procesa  $X(t)$ .

## Autokorelacija - spektar snage

$$S_{XX}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A[R_{XX}(t, t+\tau)] e^{-j\omega\tau} d\tau$$

- $S_{XX}(\omega)$  i  $A[R_{XX}(t, t+\tau)]$  su Fourierov transformacijski par:

$$S_{XX}(\omega) \leftrightarrow A[R_{XX}(t, t+\tau)]$$

- Za  $X(t)$  stacionaran u širem smislu vrijedi:

$$A[R_{XX}(t, t+\tau)] = R_{XX}(\tau)$$

- $\Rightarrow$  AKF nije funkcija vremena, već samo pomaka  $\tau$ .

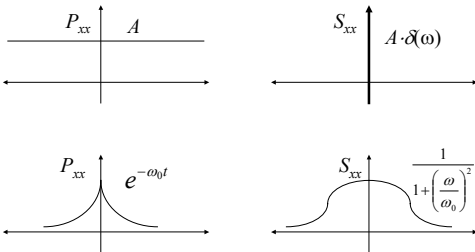
## Wiener-Khinchinove relacije

$$S_{XX}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$R_{XX}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

- Veza autokorelacijske funkcije i spektra snage stacionarnog slučajnog procesa.

## Wiener-Khinchinove relacije



## Kroskorelacija – spektralna gustoća međusnage

- Neka je proces  $W(t) = X(t) + Y(t)$ .
- Autokorelacija  $R_{WW}(t, t+\tau) = E\{W(t)W(t+\tau)\} = E\{[X(t)+Y(t)] \cdot [X(t+\tau)+Y(t+\tau)]\} = R_{XX}(t, t+\tau) + R_{YY}(t, t+\tau) + R_{XY}(t, t+\tau) + R_{YX}(t, t+\tau)$ .
- Napravimo vremensku srednju vrijednost  $A[\cdot]$  i uradimo Fourierovu transformaciju:
- $S_{WW}(\omega) = S_{XX}(\omega) + S_{YY}(\omega) + S_{XY}(\omega) + S_{YX}(\omega)$ .
- Dva nova člana  $S_{XY}(\omega)$  i  $S_{YX}(\omega)$  su **spektri međusnage** (engl. cross-spectra)

## Kroskorelacija – spektralna gustoća međusnage

- Mogu se dobiti iz Fourierovog spektra konačnog segmenta jedne realizacije:

$$x_T(t) \rightarrow X_T(\omega),$$

$$y_T(t) \rightarrow Y_T(\omega).$$

- Međusnaga dva signala:

$$P_{XY}(T) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X_T^*(\omega) Y_T(\omega) d\omega$$

- Parsevalov teorem daje:

$$P_{XY}(T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X_T^*(\omega) Y_T(\omega)}{2T} d\omega$$

## Kroskorelacija – spektralna gustoća međusnage

- Srednja vrijednost preko članova ansambla:

$$\bar{P}_{XY}(T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E[X_T^*(\omega) Y_T(\omega)]}{2T} d\omega$$

- Za  $T \rightarrow \infty$  najbolja procjena:

$$\bar{P}_{XY} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[X_T^*(\omega) Y_T(\omega)]}{2T} d\omega$$

$$\bar{P}_{XY} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{XY}(\omega) d\omega \quad \bullet \text{ Analogno za } P_{YX}.$$

## Svojstva spektra međusnage

- $S_{XY}(\omega) = S_{YX}(-\omega) = S_{YX}^*(\omega)$ ,
- $\text{Re}[S_{XY}(\omega)]$  – parna funkcija,
- $\text{Im}[S_{XY}(\omega)]$  – neparna funkcija,
- ako su  $S_{XY}(\omega) = 0$  i  $S_{YX}(\omega) = 0$  kaže se da su  $X(t)$  i  $Y(t)$  ortogonalni:  $X(t) \perp Y(t)$ ,
- vrijedi:  $A[R_{XY}(t, t+\tau)] \rightarrow S_{XY}(\omega)$   
(izvod sličan kao kod autokorelacije),
- tj. kroskorelacijska funkcija i spektar međusnage čine Fourierov transformacijski par,
- za stacionarne procese vrijedi:  $R_{XY}(t, t+\tau) \rightarrow S_{XY}(\omega)$ .

## Gustoća spektra snage vremenski diskretnih slučajnih procesa

$$S_{XX}(e^{j\omega}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{E[X_N^* X_N]}{2N+1}$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{2N+1} \sum_{n_1=-N}^N X(n_1) e^{j\omega n_1} \cdot \sum_{n_2=-N}^N X(n_2) e^{-j\omega n_2} \right\}$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n_1=-N}^N \sum_{n_2=-N}^N \underbrace{E[X(n_1)X(n_2)]}_{R_{XX}(n_1, n_2)} \cdot e^{j\omega(n_1-n_2)}$$

- $R_{XX}(n_1, n_2)$  je autokorelacija diskretnog procesa  $X(n)$ .
- Supstituiramo  $n = n_1$  i  $k = n_2 - n_1$ , pa slijedi...

## Gustoća spektra snage vremenski diskretnih slučajnih procesa

$$S(e^{j\omega}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N-n} \sum_{k=-n}^N R_{XX}(n, n+k) \cdot e^{-j\omega k}$$

- Za  $N \rightarrow \infty$

$$S(e^{j\omega}) = \sum_{-\infty}^{\infty} \left[ \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N R_{XX}(n, n+k) \cdot e^{j\omega k} \right]$$

vremenska srednja vrijednost AKF procesa  $X(n)$

$$S(e^{j\omega}) = \sum_{-\infty}^{\infty} A[R_{XX}(n, n+k)] \cdot e^{-j\omega k}$$

- Veza  $S_{XX}(e^{j\omega})$  i  $A[R_{XX}(n, n+k)]$ : Fourierov red.

## Gustoća spektra snage vremenski diskretnih slučajnih procesa

- Za stacionarne procese:

$$S(e^{j\omega}) = \sum_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(k) \cdot e^{-j\omega k}$$

$$R_{XX}(k) = \frac{1}{2N+1} \int_{-\pi}^{\pi} S(e^{j\omega}) d\omega$$

- Wiener – Khinchinove relacije za vremenski diskretne slučajne procese.
- Srednja snaga:

$$P_{XX} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N E[X^2(n)] \quad P_{XX} = A\{E[X^2(n)]\}$$

## Gustoća spektra snage vremenski diskretnih slučajnih procesa

- Srednja snaga  $P_{XX}$  integriranjem gustoće spektra:

$$P_{XX} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{XX}(e^{j\omega}) d\omega$$

$$S_{XX}(e^{j\omega}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{E[|X_N(e^{j\omega})|^2]}{2N+1}$$

## Slučajni proces u linearnom sustavu



Prof. dr. sc. Hrvoje Babić

Dr. sc. Damir Seršić

<http://www.zesoi.fer.hr/teorijasignala>

## Odziv vremenski stalnog diskretnog linearnog sustava

- Izlaz diskretnog vremenski stalnog linearnog sustava dan je konvolucijskom sumacijom:

$$\begin{array}{c} x_r(n) \\ \hline \boxed{h(n)} \\ \hline y_r(n) \end{array} \quad y_r(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n-m) x_r(m),$$

- Što je bio izraz za jednu realizaciju slučajnog procesa  $x_r$ , a za sve realizacije možemo napisati:

$$\begin{array}{c} X(n) \\ \hline \boxed{h(n)} \\ \hline Y(n) \end{array} \quad Y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n-m) X(m).$$

## Srednja (očekivana) vrijednost izlaza linearnog sustava

- U slučajnom procesu to vrijedi za svaku realizaciju, pa tako i za očekivanu vrijednost obje strane konvolucijske sumacije.

$$E[Y(n)] = E\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n-m) X(m)\right] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n-m) \underbrace{E[X(m)]}_{\bar{X}}$$

- Za stacionarne procese  $E[X(m)]$  je konstanta, pa slijedi da je i  $E[Y(n)]$  konstanta:

$$E[Y(n)] = \bar{Y} = \bar{X} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m).$$

## Srednja (očekivana) vrijednost izlaza linearnog sustava

- Zanimljiv rezultat imamo i u  $Z$ -domeni.
- Kako je  $Z$  transformacija impulsnog odziva  $h(m)$ :

$$H(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) z^{-m}, \quad \text{slijedi da je}$$

$$H(1) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m), \quad \text{odnosno}$$

$$E[Y(n)] = \bar{Y} = \bar{X} \cdot H(1).$$

## Autokorelacijska sekvencija

- Očekivana vrijednost  $E[Y(n_1) Y(n_2)] = R_{yy}(n_1, n_2)$ ,

$$\begin{aligned} R_{yy}(n_1, n_2) &= E\left[\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n_1-m) X(m)\right) \cdot Y(n_2)\right], \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n_1-m) E[X(m) \cdot Y(n_2)], \end{aligned}$$

$$R_{yy}(n_1, n_2) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n_1-m) R_{xy}(m, n_2)$$

- Za stacionarni proces, uz supstituciju  $k = n_2 - n_1$  i  $l = n_2 - m$  slijedi:

$$R_{yy}(k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l-k) R_{xy}(l)$$

## Autokorelacijska sekvencija

- Isto tako možemo dobiti:

$$E[Y(n_1) \cdot X(n_2)] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n_1-m) E[X(m) \cdot X(n_2)],$$

$$R_{yx}(n_1, n_2) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n_1-m) R_{xx}(m, n_2).$$

- Za stacionarni proces, uz supstituciju  $k = n_2 - n_1$  i  $l = n_2 - m$  slijedi:

$$R_{yx}(k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l-k) R_{xx}(l),$$

$$R_{yx} = h * R_{xx}.$$

## Autokorelacijska sekvencija

- Kako je  $R_{xy}(k) = R_{yx}(-k)$  i  $R_{xx}(k) = R_{xx}(-k)$ , vrijedi:

$$R_{xy}(k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(-l+k) R_{xx}(l), \quad R_{xy}(k) = h(-k) * R_{xx}(k).$$

- Slično imamo:

$$R_{yy} = h * R_{xy},$$

$$R_{yy}(k) = \underbrace{h(k) * h(-k)}_{\bar{h}(k)} * R_{xx}(k).$$

Često se naziva autokorelacija impulsnog odziva  $r_{hh}$ .

$$R_{yy}(k) = r_{hh}(k) * R_{xx}(k).$$

## Autokorelacijska sekvencija u frekvencijskoj domeni ( $F_{vd}$ )

$$S_{YX}(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) S_{XX}(e^{j\omega}),$$

$$S_{XY}(e^{j\omega}) = S_{YX}(e^{-j\omega}),$$

$$S_{XY}(e^{j\omega}) = H(e^{-j\omega}) S_{XX}(e^{j\omega}),$$

$$S_{YY}(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) H(e^{-j\omega}) S_{XX}(e^{j\omega}),$$

$$S_{YY}(e^{j\omega}) = \underbrace{|H(e^{j\omega})|^2}_{R_{hh}(e^{j\omega})} S_{XX}(e^{j\omega}).$$

- Transfer funkcija snage  $R_{hh}(e^{j\omega})$ .

## Autokorelacijska sekvencija u Z domeni

$$S_{YX}(z) = H(z) S_{XX}(z),$$

$$S_{XY}(z) = S_{YX}(z^{-1}),$$

$$S_{XY}(z) = H(z^{-1}) S_{XX}(z),$$

$$S_{YY}(z) = H(z) H(z^{-1}) S_{XX}(z),$$

$$S_{YY}(z) = \underbrace{|H(z)|^2}_{R_{hh}(z)} S_{XX}(z).$$

- Transfer funkcija snage  $R_{hh}(z)$ , ili transfer funkcija II reda.

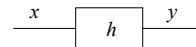
## Optimalni linearni sustavi



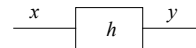
Prof. dr. sc. Hrvoje Babić  
<http://spus.zesoi.fer.hr>

## Optimalni linearni sustavi

- Analiza:  $x, h \rightarrow y$



- Sinteza:  $x, y \rightarrow h$



- Analiza je uvijek moguća, iako često složena.
- Sinteza ne daje uvijek ostvarivo rješenje.
- Na sustavu često postoje ograničenja.

## Optimalni linearni sustavi

- Realni sustavi – konačnog reda, s raspodijeljenim parametrima, ...
- Često na temelju jednostavne logike znamo željeni odnos  $x$  i  $y$ , ali to nekad nije ostvarivo!
- Ako želimo odrediti sustav koji zadovoljava popratne uvjete odnosno ograničenja, preostaje nam optimizacija.
- Za linearne sustave to je optimizacija prijenosne funkcije ili impulsnog odziva.

## Optimalni linearni sustavi

- Moramo znati:
  - ulazni signal, odnosno njegove specifikacije,
  - ograničenja ili popratne uvjete koje sustav treba zadovoljiti,
  - kriterij optimalnosti (koji sigurno uključuje izlazni signal).

## Optimalni linearni sustavi

- Ulaz:
  - deterministički, stohastički ili mješavina.
  - stohastički: zadan funkcijom gustoće vjerojatnosti ili razdiobom, autokorelacijskom funkcijom, spektrom snage, ...

## Optimalni linearni sustavi

- Sustav:
  - ograničenja sustava.
  - zbijeni ili raspodijeljeni parametri.
  - linearan ili nelinearan.
  - kauzalan ili nekauzalan.
  - ostvariv ili neostvariv.
  - vremenski stalan ili promjenjiv.

## Optimalni linearni sustavi

- Kriterij optimalnosti
  - je smisljena mjera dobrote sustava.
  - Bitno svojstvo je da je to izraženo jednadžbama koje se daju riješiti, analitički ili numerički.
  - Najčešće je to minimalizacija greške realnog od željenog (idealnog) sustava.
  - Može biti i maksimiranje korisnih komponenti signala prema nekorisnim (smetnjama).

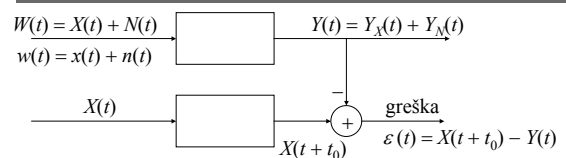
## Optimalni linearni sustavi

- Mi ćemo pronaći nekauzalni sustav koji minimizira kvadratnu grešku između željenog slučajnog signala i šuma.
- Preciznije, tražimo optimalan sustav za procjenu ulaznog slučajnog signala u šumu, a dozvoljen je eventualni pomak signala.

## Optimalan sustav u smislu najmanjeg kvadrata greške

- Sustav koji najbolje filtrira slučajni signal iz aditivnog šuma, uz eventualni vremenski pomak je Wienerov filter.
- Sustav se projektira tako da njegov izlaz bude dobra ocjena prošle, sadašnje ili buduće trenutne vrijednosti signala.

## Wienerov filter

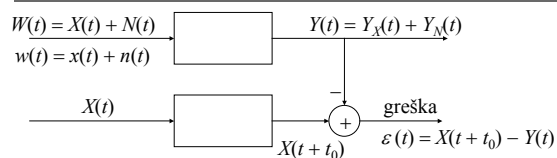


- prijenosna funkcija idealnog sustava

$$H_i(\omega) = e^{j\omega t_0} \Rightarrow A(\omega) = 1; \Theta(\omega) = \omega t_0$$

vremenski pomak  $t_0$

## Wienerov filter



- za  $t_0 > 0$ ,  $t_0 = 0$ ,  $t_0 < 0$  → ocjenjuje se buduća, sadašnja ili prošla vrijednost signala.
- Mjera greške: integral kvadratne vrijednosti → predstavlja snagu procesa greške  $\varepsilon(t)$ .

## Wienerov filter

$$P_\varepsilon = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} [X(t+t_0) - Y(t)]^2 dt$$

Iskoristit ćemo Parsevalov teorem:

$$P_\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\varepsilon\varepsilon}(\omega) d\omega,$$

gdje je  $S_{\varepsilon\varepsilon}(\omega)$  gustoća spektra snage pogreške dana sa:

$$S_{\varepsilon\varepsilon}(\omega) = |H(\omega) - H_i(\omega)|^2 S_{XX}(\omega) + |H(\omega)|^2 S_{NN}(\omega).$$

## Wienerov filter

$$S_{\varepsilon\varepsilon}(\omega) = |H(\omega) - H_i(\omega)|^2 S_{XX}(\omega) + |H(\omega)|^2 S_{NN}(\omega)$$

$$H_i(\omega) = e^{j\omega t_0}$$

$$H(\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\Theta(\omega)}$$

$S_{XX}(\omega)$  – gustoća spektra snage signala

$S_{NN}(\omega)$  – gustoća spektra snage šuma

## Wienerov filter

$$P_\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ |A(\omega)e^{j\Theta} - e^{j\omega t_0}|^2 S_{XX}(\omega) + A^2(\omega) S_{NN}(\omega) \right] d\omega$$

$$Ae^{j\Theta} - e^{j\omega t_0} = A(\cos \Theta + j \sin \Theta) - (\cos \omega t_0 + j \sin \omega t_0)$$

$$\begin{aligned} |Ae^{j\Theta} - e^{j\omega t_0}|^2 &= (A \cos \Theta - \cos \omega t_0)^2 + (A \sin \Theta - \sin \omega t_0)^2 \\ &= A^2 \cos^2 \Theta - 2A \cos \Theta \cos \omega t_0 + \cos^2 \omega t_0 + \\ &\quad + A^2 \sin^2 \Theta - 2A \sin \Theta \sin \omega t_0 + \sin^2 \omega t_0 \end{aligned}$$

## Wienerov filter

$$|Ae^{j\Theta} - e^{j\omega t_0}|^2 = A^2 + 1 - 2A \cos(\Theta - \omega t_0)$$

$$P_\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ (A^2 + 1 - 2A \cos(\Theta - \omega t_0)) S_{XX} + A^2 S_{NN} \right] d\omega$$

- Tražimo minimalnu vrijednost integrala:  
→ ispunjeno za maksimalnu vrijednost kosinusa:

$$\Theta - \omega t_0 = 0 \Rightarrow \Theta = \omega t_0.$$

## Wienerov filter

- Fazna karakteristika Wienerovog filtra je linearna:

$$\Theta(\omega) = \omega t_0,$$

- pa slijedi:

$$P_\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ (A^2 + 1 - 2A) S_{XX} + A^2 S_{NN} \right] d\omega,$$

$$P_\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ A^2 (S_{XX} + S_{NN}) - 2A S_{XX} + S_{XX} \right] d\omega.$$

- Za koji  $A(\omega)$  integral poprima najmanju vrijednost?



## Wienerov filter

$$P_\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [A^2(S_{XX} + S_{NN}) - 2AS_{XX} + S_{XX}] d\omega$$

- Nadopunjavanjem podintegralne funkcije do potpunog kvadrata dobivamo:

$$A^2(S_{XX} + S_{NN}) - 2AS_{XX} + S_{XX} = \left( A\sqrt{S_{XX} + S_{NN}} - \frac{S_{XX}}{\sqrt{S_{XX} + S_{NN}}} \right)^2 + \frac{S_{XX}S_{NN}}{S_{XX} + S_{NN}}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\geq 0} \qquad \qquad \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{\geq 0}$

## Wienerov filter

- Najmanju vrijednost integrala dobivamo za:

$$A(\omega)\sqrt{S_{XX} + S_{NN}} - \frac{S_{XX}}{\sqrt{S_{XX} + S_{NN}}} = 0,$$

$$A(\omega) = \frac{S_{XX}(\omega)}{S_{XX}(\omega) + S_{NN}(\omega)}$$

- Dobili smo amplitudnu karakteristiku Wienerovog filtra.

## Wienerov filter

- Optimalna prijenosna funkcija koja najpovoljnije filtrira signal iz šuma je dakle:

$$H(\omega) = \frac{S_{XX}(\omega)}{S_{XX}(\omega) + S_{NN}(\omega)} e^{j\omega t_0}$$

- Impulsni odziv je nekauzalan:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{XX}(\omega)}{S_{XX}(\omega) + S_{NN}(\omega)} e^{j\omega(t+t_0)} d\omega$$

## Wienerov filter

- Nekauzalni odziv je neostvariv.
- Možemo ga aproksimirati ako u oba kanala stavimo dovoljno kašnjenje.
- Za dovoljno veliki  $t_0$  nekauzalni dio odziva postaje zanemariv.
- Srednja vrijednost (očekivanje) kvadrata greške je određena ostatkom:

$$P_\varepsilon(\omega) = E[\varepsilon^2(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{XX}(\omega)S_{NN}(\omega)}{S_{XX}(\omega) + S_{NN}(\omega)} d\omega$$

## Diskusija ostatka

- Prethodnom relacijom definirali smo očekivanu kvadratnu pogrešku estimacije.
- To je najmanja moguća pogreška za sve linearne sustave.

## Optimalna amplitudna karakteristika

- Promotrit ćemo optimalnu amplitudnu karakteristiku

$$A(\omega) = \frac{S_{XX}(\omega)}{S_{XX}(\omega) + S_{NN}(\omega)}$$

- za dva posebna slučaja:
  - šum mnogo veći od korisnog signala
  - korisni signal mnogo veći od šuma

## Optimalna amplitudna karakteristika

a)  $S_{NN}(\omega) \gg S_{XX}(\omega)$

- Za bijeli šum vrijedi:

$$S_{NN}(\omega) = S_{NN}(0),$$

$$A(\omega) = \frac{S_{XX}(\omega)}{S_{XX}(\omega) + S_{NN}(0)} \approx \frac{S_{XX}(\omega)}{S_{NN}(0)}.$$

- Ako je šum velik, filter mora imati pojas propuštanja jednak pojasu spektra gustoće snage signala.

## Optimalna amplitudna karakteristika

- Filter mora gušiti što više šuma, ali da propuštanje korisnog signala bude zadovoljavajuće.
- Kvalitetu signala koji prolazi određuje omjer:

$$\frac{S_{XX}(\omega)}{S_{XX}(0)}.$$

- Što je taj omjer veći, veći je i šum koji prođe.

## Optimalna amplitudna karakteristika

b)  $S_{NN}(\omega) \ll S_{XX}(\omega)$

- Za slabi šum vrijedi:

$$A(\omega) = \frac{S_{XX}(\omega)}{S_{XX}(\omega) + S_{NN}(0)} \approx 1.$$

- Ako je šum slab, optimalno je da filter ima široki pojas propuštanja.

## Prilagođeni filter

- Upotrebljava se u digitalnim komunikacijama, mjernoj instrumentaciji, digitalnoj obradi signala, detekciji radarskih impulsa, u nuklearnoj tehnici (određivanje zračenja), ...
- Prilagođeni filter treba identificirati pulsni signal u prisustvu šuma.

## Prilagođeni filter

- Prilagođeni filter je određen oblikom signala kojeg želimo filtrirati.

$$\frac{x(t) + n(t)}{S_{NN}(\omega)} \rightarrow \boxed{\phantom{\text{filter}}} \rightarrow \frac{x_0(t) + n_0(t)}{S_{NN}(\omega) \cdot |H(\omega)|^2}$$

- Kako ne znamo oblik šuma, već samo njegovu gustoću spektra snage, prelazimo na:

$$\left(\frac{S}{N}\right) \rightarrow \boxed{\phantom{\text{filter}}} \rightarrow \left(\frac{S_0}{N_0}\right)$$

omjer signal-šum

## Prilagođeni filter

- Omjer signal-šum na izlazu filtra mora biti veći nego na ulazu.

Def. :

$$\left(\frac{S}{N}\right) = \frac{|X(t_0)|^2}{E\{N(t)\}}$$

vršna vrijednost snage determinističkog signala

srednja vrijednost snage šuma

## Prilagođeni filter

- Deterministički signal na izlazu određen je inverznom Fourierovom transformacijom:

$$x_0(t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)H(\omega)e^{j\omega t_0} d\omega.$$

- Srednja vrijednost snage šuma na izlazu filtra određena je sa:

$$E\{N_0(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{NN}(\omega)|H(\omega)|^2 d\omega.$$

## Prilagođeni filter

⇒

$$\left(\frac{S_0}{N_0}\right) = \frac{\left|\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)H(\omega)e^{j\omega t_0} d\omega\right|^2}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{NN}(\omega)|H(\omega)|^2 d\omega}$$

- Omjer signal-šum na izlazu mora biti maksimalan.

⇒ tražimo maksimum.

## Prilagođeni filter

- Iskoristit ćemo Schwartzovu nejednakost:

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)B(\omega) d\omega\right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |A(\omega)|^2 d\omega \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |B(\omega)|^2 d\omega.$$

- Znak jednakosti vrijedi samo ako je:

$$B(\omega) = c \cdot A^*(\omega),$$

- gdje je c realna konstanta.

## Prilagođeni filter

- Schwartzovu nejednakost primjenjujemo na izraz u brojniku, pri čemu ćemo odabrati:

$$A(\omega) = H(\omega)\sqrt{S_{NN}(\omega)},$$

$$B(\omega) = \frac{X(\omega)e^{j\omega t_0}}{2\pi\sqrt{S_{NN}(\omega)}}.$$

- Pri tome nas drugi korijen iz gustoće spektra snage ne treba brinuti jer je on uvijek pozitivna veličina.

## Prilagođeni filter

⇒

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)\sqrt{S_{NN}(\omega)} \cdot \frac{X(\omega)e^{j\omega t_0}}{2\pi\sqrt{S_{NN}(\omega)}} d\omega\right|^2 \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 S_{NN}(\omega) d\omega \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|X(\omega)|^2}{S_{NN}(\omega)} d\omega$$

krati nazivnik

## Prilagođeni filter

- Pa je omjer signal-šum na izlazu određen relacijom:

$$\left(\frac{S_0}{N_0}\right) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|X(\omega)|^2}{S_{NN}(\omega)} d\omega.$$

- Želimo maksimum, tj. da vrijedi jednakost:

$$\left(\frac{S_0}{N_0}\right)_{\max} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|X(\omega)|^2}{S_{NN}(\omega)} d\omega.$$

## Prilagođeni filter

- Kao što je već navedeno, jednakost vrijedi za:

$$B(\omega) = c \cdot A^*(\omega),$$

- pa slijedi:

$$\frac{X(\omega)e^{j\omega t_0}}{2\pi\sqrt{S_{NN}(\omega)}} = c \cdot H^*(\omega)\sqrt{S_{NN}(\omega)}.$$

## Prilagođeni filter

- Pa je optimalna prijenosna funkcija prilagođenog filtra dana sa:

$$H_{opt}^*(\omega) = \frac{X(\omega)e^{j\omega t_0}}{2\pi \cdot c \cdot S_{NN}(\omega)},$$

- odnosno:

$$H_{opt}(\omega) = \frac{X^*(\omega)e^{-j\omega t_0}}{2\pi \cdot c \cdot S_{NN}(\omega)}.$$

## Prilagođeni filter

- Za bijeli šum vrijedi :

$$S_{XX}(\omega) = konst.$$

$$\Rightarrow H_{opt}(\omega) = k \cdot X^*(\omega)e^{-j\omega t_0}.$$

- Kod bijelog šuma je  $H_{opt}(\omega)$  proporcionalan prigušenom konjugiranom spektru signala.
- Iz oblika optimalne prijenosne funkcije prilagođenog filtra vidi se da su više frekvencije jače prigušene od nižih.

## Prilagođeni filter

- Za neku kompleksnu funkciju

$$f(t) = f_r(t) + jf_i(t),$$

- je njen Fourierov spektar dan sa:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [f_r(t) + jf_i(t)] \cdot e^{-j\omega t} dt,$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [f_r(t) + jf_i(t)] \cdot [\cos(\omega t) - j \sin(\omega t)] dt.$$

## Prilagođeni filter

$$F(\omega) = F_r(\omega) + jF_i(\omega)$$

$$F_r(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [f_r(t) \cos(\omega t) + f_i(t) \sin(\omega t)] dt$$

$$F_i(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [f_i(t) \cos(\omega t) - f_r(t) \sin(\omega t)] dt$$

## Prilagođeni filter

- Za realne funkcije vrijedi da je

$$f_i(t) = 0,$$

- pa slijedi da je:

$$F_r(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_r(t) \cos(\omega t) dt,$$

$$F_i(\omega) = - \int_{-\infty}^{\infty} f_r(t) \sin(\omega t) dt.$$

## Prilagođeni filter

- Sada je vidljivo da za realne funkcije vrijedi da je realni dio njihovog spektra parna funkcija od  $\omega$ , a imaginarni neparna.
- Odnosno vrijedi:

$$F_r(-\omega) = F_r(\omega),$$

$$F_i(-\omega) = -F_i(\omega).$$

- Kako mi u realnom svijetu radimo isključivo sa realnim funkcijama, iskoristit ćemo navedene te dvije relacije.

## Prilagođeni filter

- Za optimalnu prijenosnu funkciju prilagođenog filtra u slučaju bijelog šuma tada vrijedi:

$$\begin{aligned} H_{opt}(\omega) &= k \cdot X^*(\omega) e^{-j\omega t_0}, \\ &= k \cdot [X_r(\omega) + jX_i(\omega)]^* e^{-j\omega t_0}, \\ &= k \cdot [X_r(\omega) - jX_i(\omega)] e^{-j\omega t_0}, \\ &= k \cdot [X_r(-\omega) + jX_i(-\omega)] e^{-j\omega t_0}, \\ &= k \cdot X(-\omega) e^{-j\omega t_0}. \end{aligned}$$

## Prilagođeni filter

$$H_{opt}(\omega) = k \cdot X(-\omega) e^{-j\omega t_0}$$

$$H_{opt}(-\omega) = k \cdot X(\omega) e^{j\omega t_0}$$

- To znači da će impulsni odziv prilagođenog filtra biti dan sa:

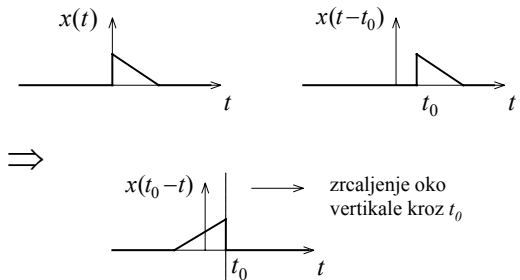
$$h_{opt}(-t) = k \cdot x(t + t_0),$$

- odnosno:

$$h_{opt}(t) = k \cdot x(t_0 - t).$$

## Prilagođeni filter

- Primjer:



## Odziv prilagođenog filtra

- Odziv prilagođenog filtra određen je konvolucijskim integralom:

$$y_{opt}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h_{opt}(t - \tau) d\tau,$$

$$= k \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) x(t_0 - (t - \tau)) d\tau,$$

$$= k \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) x(t_0 - (t - \tau)) d\tau.$$

## Odziv prilagođenog filtra

$$y_{opt}(t) = k \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) x(t_0 - t + \tau) d\tau$$

- Što za  $t=t_0$  iznosi:

$$y_{opt}(t) = k \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)^2 d\tau,$$

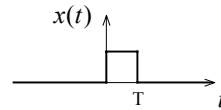
$$y_{opt}(t) = k \cdot E_X \Rightarrow \text{energija ulaznog signala}$$

## Odziv prilagođenog filtra

- Odziv u trenutku  $t=t_0$  proporcionalan je energiji ulaznog signala.

## Primjer prilagođenog filtra

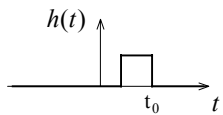
- Zadatak: Odrediti prilagođeni filtar za detekciju pravokutnog impulsa.



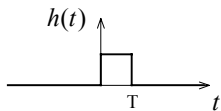
- Impulsni odziv prilagođenog filtra je da sa:

$$h_{opt}(t) = k \cdot x(t_0 - t).$$

## Primjer prilagođenog filtra

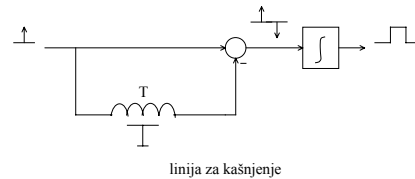


- Uzmemo li da je  $t_0 = T$ , dobivamo:



## Primjer prilagođenog filtra

- Realizacija takvog impulsnog odziva:



## Primjer prilagođenog filtra

- Detekcija signala:

