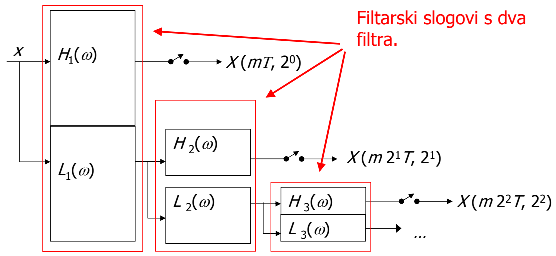
# Teorija signala

Prof. dr. sc. Damir Seršić
http://ts.zesoi.fer.hr

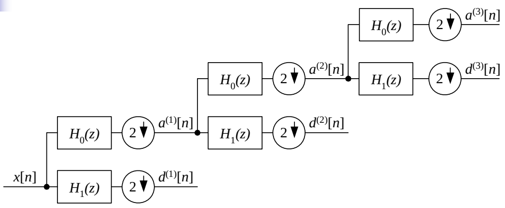
## Oktavna DWT kao slog filtara

- Rekurzivna realizacija




2

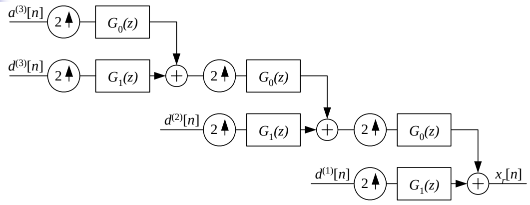
## Wavelet stablo, analiza




- Rekurzivno izračunavanje koeficijenata DWT wavelet filtarskim stablom.
- Razlaganje se ponavlja u niskopropusnoj grani.

3

## Wavelet stablo, rekonstrukcija

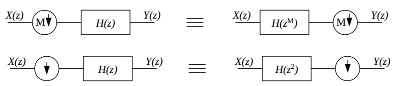



- Rekurzivna rekonstrukcija signala wavelet filtarskim stablom.
- Ako je svaki filtarski slog s PR, jasno je i da je cijeli sustav s potpunom rekonstrukcijom.

4

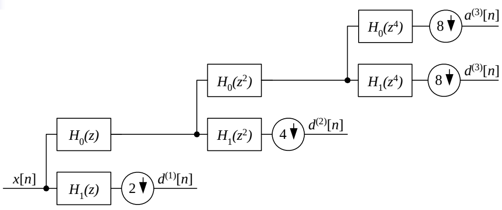
## Funkcije razlaganja

- Pitanje je koje su funkcije razlaganja u wavelet filtarskom stablu i koja je veza s DWT transformacijom?
- U stablu se javlja kaskada decimatora i filtara.
- Zamjena redoslijeda rezultira sljedećim relacijama (*eng. Noble Identities*):




5

## Wavelet stablo, analiza




- U N-toj razini imamo sljedeće kaskade filtara:

$$H_0^{(N)}(z)=\prod_{i=0}^{N-1} H_0(z^{2^i}) \qquad H_1^{(N)}(z)=H_1(z^{2^{N-1}})\prod_{i=0}^{N-2} H_0(z^{2^i})$$

6

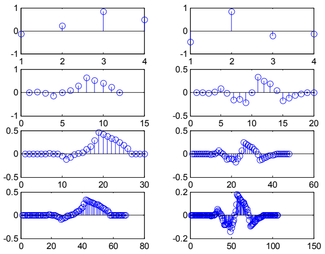
## Wavelet stablo, analiza

$$H_1^{(N)}(z) = H_1(z^{2^{N-1}})\prod_{i=0}^{N-2} H_0(z^{2^i}) \qquad H_0^{(N)}(z) = \prod_{i=0}^{N-1} H_0(z^{2^i})$$

- Filtri $H_1^{(N)}$ određuju funkcije razlaganja u različitim razinama wavelet stabla ("wavelet funkcije").
- Filtri $H_0^{(N)}$ određuju njima komplementarne funkcije razlaganja ("funkcije skale").
- Pogledat ćemo primjer.

7

## Analizirajući filtri db2 u četiri razine razlaganja



- U višim razinama razlaganja impulsni odziv filtara zadržava "isti oblik", ali ima približno dvostruko trajanje.

8

## Wavelet funkcija i funkcija skale

- Definiramo kontinuirane funkcije, koje su po odsječcima jednake impulsnim odzivima filtara.

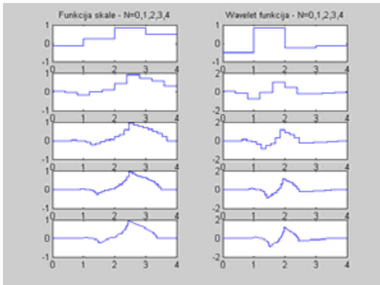
$$\varphi_N(t) = 2^{N/2} h_{0N}[n], \qquad \frac{n}{2^N} \le t < \frac{n+1}{2^N},$$

$$\psi_N(t) = 2^{N/2} h_{1N}[n], \qquad \frac{n}{2^N} \le t < \frac{n+1}{2^N}.$$

- Ovako definirane kontinuirane funkcije su normirane po vremenu i energiji.

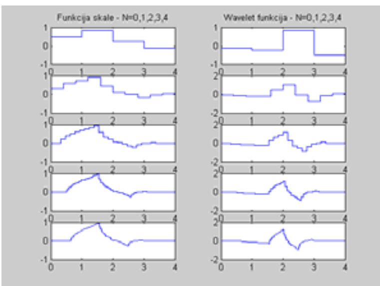
9

## db2: konvergencija analizirajuće funkcije skale i wavelet funkcije




10

## db2: konvergencija rekonstrukcijskih funkcija




11

## Wavelet funkcija i funkcija skale za db2

- Pridružene kontinuirane funkcije konstantne po odsječcima konvergiraju ako broj razina razlaganja $N$ teži u beskonačno.
- U našem primjeru rezultirajuće funkcije su zadovoljavajuće glatke (regularne).
- Uvjet realizacije DWT diskretnih signala filtarskim slogom: konvergencija i regularnost pridruženih wavelet funkcija i funkcija skale kada broj razina razlaganja teži u beskonačnost.

12

## Nužni i dovoljni uvjeti

- Pokazuje se da je za konvergenciju nužna nultočka niskopropusnog filtra $H_0(z)$ na $z=-1$, te vrijednost $\sqrt{2}$ na $z=1$:

$$H_0(z)\big|_{z=-1}=0,\quad H_0(z)\big|_{z=1}=\sqrt{2};$$

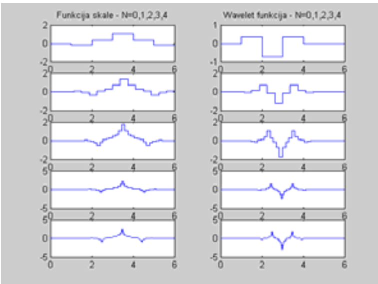
- Dovoljan uvjet (Mallat 89) je da NP filtar nema nultočaka na jediničnoj kružnici u rasponu od $-\pi/2$ do $\pi/2$.

13

- Kod ortogonalnih slogova rekonstrukcijske funkcije su zrcalno preokrenute analizirajuće.
- Kod biortogonalnih slogova rekonstrukcijske funkcije redovito su sasvim različite od analizirajućih.
- Za brojne primjene (kompresija, potiskivanje šuma, …) važnija nam je regularnost rekonstrukcijskih funkcija.

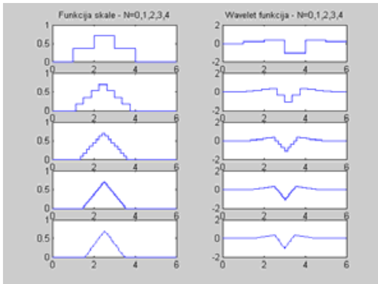
14

## bior2.2: konvergencija analizirajuće funkcije skale i wavelet funkcije




15

## bior2.2: konvergencija rekonstrukcijskih funkcija




16

## Analizirajuća strana: filtarski koeficijenti i funkcije

- Neka funkcija skale i wavelet funkcija konvergiraju:

$$\varphi(t)=\lim_{N\to\infty}\varphi_N(t),\qquad \psi(t)=\lim_{N\to\infty}\psi_N(t).$$

- Vrijede sljedeće veze s filtarskim koeficijentima:

$$\varphi(t)=\sqrt{2}\sum_{k=0}^{N_0}h_0[k]\varphi(2t-k)\qquad \psi(t)=\sqrt{2}\sum_{k=0}^{N_1}h_1[k]\varphi(2t-k)$$

- Provjerit ćemo na primjeru.

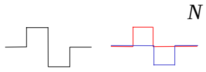
17

## Analizirajuća strana: filtarski koeficijenti i funkcije

$$\varphi(t)=\sqrt{2}\sum_{k=0}^{N_0}h_0[k]\varphi(2t-k)\qquad \psi(t)=\sqrt{2}\sum_{k=0}^{N_1}h_1[k]\varphi(2t-k)$$

- Primjer (Haarov wavelet):

$$\psi(t)=\begin{cases}1 & 0\le t<1/2\\ -1 & 1/2\le t\le 1\\ 0 & drugdje\end{cases}$$

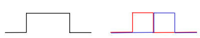


$N=2$

$h_1=\{1,-1\}/\sqrt{2}$

$\psi(t)=\varphi(2t)-\varphi(2t-1)$

$$\varphi(t)=\begin{cases}1 & 0\le t\le 1\\ 0 & drugdje\end{cases}$$



$h_0=\{1,1\}/\sqrt{2}$

$\varphi(t)=\varphi(2t)+\varphi(2t-1)$

18

## Brza oktavna DWT

$$\psi_{m,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^k}}\psi\left(\frac{t}{2^k} - m\right), \quad X[m,k] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\psi_{m,k}(t)\,dt$$

- Neka je $\Psi(t)$ wavelet funkcija (limes $\Psi_N(t)$), te neka je $\varphi(t)$ pripadna funkcija skale.
- Krenemo računanje na primjer od razine $k = 0$:

$$A[m,0] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\varphi(t-m)\,dt$$

- $A[m,k]$ zovemo aproksimacijskim koeficijentima.

19

## Brza oktavna DWT

- Kako je slijedi:

$$\psi(t) = \sqrt{2}\sum_{k=0}^{N_1} h_1[k]\,\varphi(2t-k)$$

$$\psi\left(\frac{t}{2} - m\right) = \sqrt{2}\sum_{k=0}^{N_1} h_1[k]\,\varphi(t-k-2m)$$

$$X[m,1] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\sum_{k=0}^{N_1} h_1[k]\,\varphi(t-k-2m)\,dt$$

$$X[m,1] = \sum_{k=0}^{N_1} h_1[k]\,A[2m-k,0]$$

- Ovo odgovara filtriranju koeficijenata $A[m, 0]$ filtrom $h_1$, te decimaciji s faktorom 2.

20

## Brza oktavna DWT

- Iz $\varphi(t) = \sqrt{2}\sum_{k=0}^{N_0} h_0[k]\,\varphi(2t-k)$ slijedi:

$$A[m,1] = \sum_{k=0}^{N_0} h_0[k]\,A[2m-k,0]$$

- To je filtriranje s $h_0$ i decimacija s faktorom 2.
- Konačno, imamo postupak za brzu DWT:
  - 1.) integriranjem signala pomnoženog s pomaknutim funkcijama izračunavamo aproksimacijske koeficijente $A[m,k_0]$.
  - 2.) Za dobivanje $X[m,k]$ za $k > k_0$ aproksimacijske koeficijente propustimo kroz wavelet filtarski slog!

21

## Zaključci

- Wavelet filtarski slog možemo koristiti za brzo računanje DWT.
- S druge strane, postupak dizajna filtarskog sloga možemo promatrati kao metodu projektiranja ortogonalnih ili biortogonalnih waveleta konačnog trajanja.

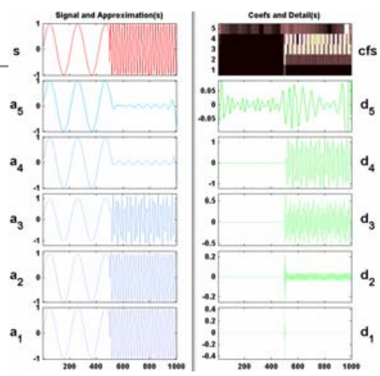
22

## Analiza signala DWT slogom

- Napravit ćemo analizu više signala različitim DWT slogovima.
- Prvi primjer: signal je složen od dva sinusa različitih frekvencija.
- Analiza:
  - ortogonalnim wavelet filtarskim slogom db4.
  - ortogonalnim wavelet filtarskim slogom sym4.
  - Haarovim wavelet filtarskim slogom.

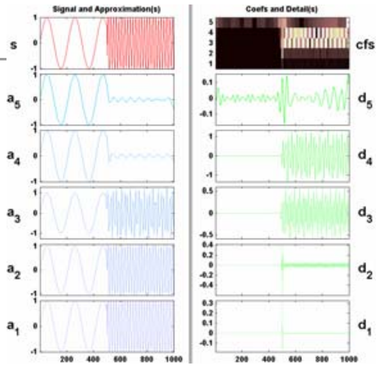
23

- Signal: dva sinusa.
- Wavelet: db4
- Lijevo: izlazi iz NP filtara u 5 razina ("aproksimacije").
- Desno: izlazi iz VP filtara u 5 razina (wavelet koeficijenti ili "detalji").



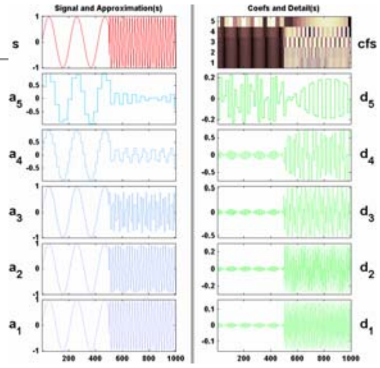

24

- Signal: dva sinusa.
- Wavelet: sym4
- Ortogonalno razlaganje uz najmanje nesimetrične funkcije daje nešto bolji opis.






- Signal: dva sinusa.
- Wavelet: Haar.
- Razlaganje sinusnog signala u wavelete konstantne po odsječcima ne daje dobar opis.



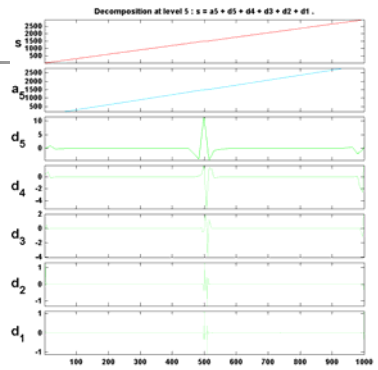



## Analiza polinoma DWT slogom

- Drugi primjer: signal je složen od dva polinoma (ovdje pravca različitih nagiba).
- Analiza:
  - biortogonalnim wavelet filtarskim slogom bior2.2
    - Zapis bior*m.n* znači *m* nultočaka rekonstrukcijskog filtra $F_0$ i *n* nultočaka analizirajućeg filtra $H_0$ na frekvenciji $\omega = \pi$.



- Signal: dva pravca.
- Wavelet: bior2.2
- Wavelet s $m$=2 poništava polinome drugog reda.
- Rezultat: pravci u $a_5$, diskontinuitet u wavelet koeficijente $d_1$-$d_5$.






## Nultočke, nul-momenti i poništavanje polinoma

- Krenimo od biortogonalnog filtarskog sloga i promatrajmo rekonstrukcijski NP filtar $F_0$.
- Neka $F_0$ ima $m$ nultočaka na Nyquistovoj frekvenciji $\omega = \pi$.
- Onda vrijedi:

$$\sum_{n=0}^{m} (-1)^n n^j f_0[n] = 0 \quad za \quad j = 0,1,\ldots,m$$



## Nultočke, nul-momenti i poništavanje polinoma

- $m$ nultočaka od $F_0$ na $\omega = \pi$ znači:

$$F_0(\omega)\big|_{\omega=\pi} = F_0'(\omega)\big|_{\omega=\pi} = \ldots = F_0^{(m-1)}(\omega)\big|_{\omega=\pi} = 0.$$

- Napišemo izraze za spektar i njegove derivacije na $\omega = \pi$:

$$F_0(\omega)\big|_{\omega=\pi} = \sum f_0[n]e^{-j\pi n} = \sum f_0[n](-1)^n,$$

$$F_0'(\omega)\big|_{\omega=\pi} = \sum f_0[n](-jn)e^{-j\pi n} = \sum f_0[n](-jn)(-1)^n,$$

$\ldots$

Izjednačavanje svih izraza s nulom daje rezultat s prethodnog slajda.

## Nultočke, nul-momenti i poništavanje polinoma

- Filtar $F_0$ određuje analizirajući VP filtar $H_1$:

$$h_1[n] = (-1)^n \cdot f_0[n]$$

- pa imamo:

$$\sum_{n=0}^{m} n^j h_1[n] = 0 \quad za \quad j = 0,1,\ldots,m$$

- Analizirajuća wavelet funkcija $\psi(t)$ nastaje kaskadnim algoritmom iz $h_1$, stoga se može pokazati:

$$\int t^j \psi(t)\, dt = 0 \quad za \quad j = 0,1,\ldots,m$$

31

## Nultočke, nul-momenti i poništavanje polinoma

- Wavelet funkcija $\psi(t)$ ima $m$ nul-momenata (*eng. vanishing moments*).
- Ako je analizirani signal polinom $m$-tog reda, wavelet koeficijenti će redom biti jednaki nuli.
- Takvo wavelet razlaganje poništava (*eng. annihilates*) polinome: informacija se prenosi isključivo u aproksimacijskim koeficijentima.
- Kako se svaka glatka funkcija može predstaviti polinomom u nekoj okolini, ovo je izuzetno važno svojstvo za koncentriranje informacije.

32

## Nultočke, nul-momenti i poništavanje polinoma

- Zaključak:
  Wavelet razlaganje je dobro za opis signala sastavljenih od odsječaka glatkih funkcija.
- Takvi su mnogi realni signali i slike!

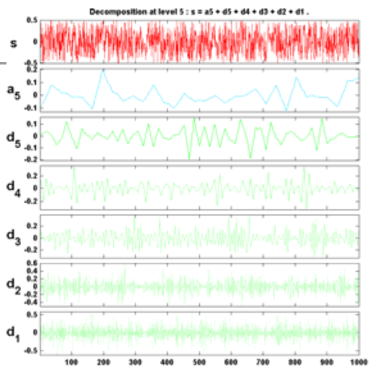
33

## Analiza šuma DWT slogom

- Treći primjer: signal je bijeli šum.
- Analiza:
  - ortogonalnim wavelet filtarskim slogom.

34

- Signal: bijeli šum.
- Wavelet: db3
- Šum se distribuira po wavelet koeficijentima u svim razinama razlaganja.




35

## Potiskivanje šuma

- Četvrti primjer: signal je sastavljen od odsječaka polinoma s pribrojenim bijelim šumom.
- Analiza:
  - wavelet filtarskim slogom bez decimacije.

36

## Potiskivanje šuma

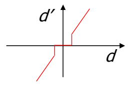
- Korisni signal sastavljen od odsječaka polinoma ili glatkih funkcija će se preslikati u mali broj wavelet i aproksimacijskih koeficijenata velike vrijednosti.
- Bijeli šum će se distribuirati po svim wavelet koeficijentima.

37

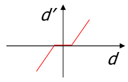
## Potiskivanje šuma

- Ideja (dvije varijante):
  - Odbaciti wavelet koeficijente ispod nekog praga (*eng. hard thresholding*)
  - Odbaciti wavelet koeficijente ispod praga a ostale umanjiti za iznos praga (*eng. soft thresholding*).

$$d'[n]=\begin{cases} d[n] & |d[n]|>\varepsilon, \\ 0 & |d[n]|\le\varepsilon. \end{cases}$$




$$d'[n]=\begin{cases} \operatorname{sgn}(d[n])\left(|d[n]|-\varepsilon\right) & |d[n]|>\varepsilon, \\ 0 & |d[n]|\le\varepsilon. \end{cases}$$

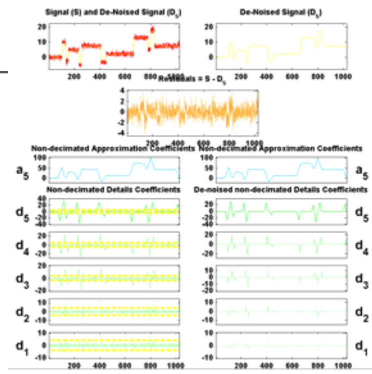



38

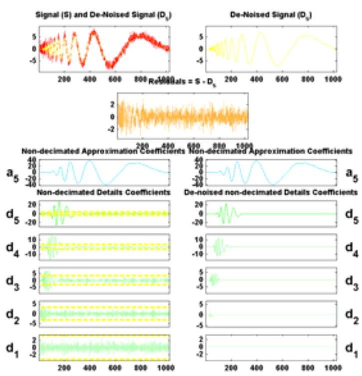
## Potiskivanje šuma

- Prag se odabire tako da se potisne većina šuma.
- Prva varijanta daje manju pogrešku pri rekonstrukciji signala u smislu najmanjih kvadrata.
- Druga je redovito bolja u primjenama, osobito kod potiskivanja šuma u slici jer nema naglih skokova u vrijednosti koeficijenata.
- Bolje rezultate se postiže wavelet filtarskim slogom bez decimacije.

39




40

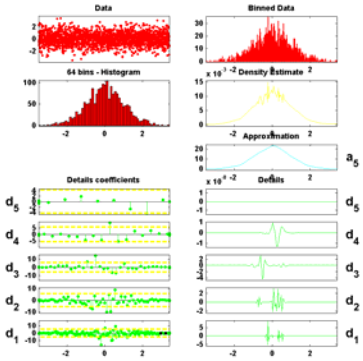



41

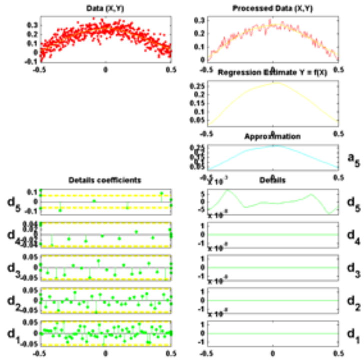
## Druge primjene

- Metoda praga može se koristiti i za brojne druge primjene.
- Procjena funkcije gustoće vjerojatnosti
  - Na podacima iz histograma napravi se wavelet analiza, a metodom praga rezultati se učine glatkim.
- Wavelet regresija
  - Umjesto polinomom, funkcijska ovisnost se aproksimira wavelet funkcijama.

42


Data
Binned Data
64 bins - Histogram
Density Estimate
Approximation
Details coefficients
Details

43


Data (X,Y)
Processed Data (X,Y)
Regression Estimate Y = f(X)
Approximation
Details coefficients
Details

44