

Teorija signala

Prof. dr. sc. Damir Seršić
<http://ts.zesoi.fer.hr>

Teme predavanja

- Motivacija za vremensko-frekvencijske obrade
- STFT – Fourierova transformacija na vremenskom otvoru
 - definicija,
 - svojstva,
 - primjeri.
- Diskretna STFT, Gaborova ekspanzija
 - definicija,
 - svojstva.

2

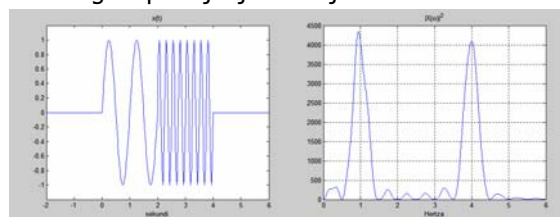
Motivacija za T-F analizu

- Fourierova analiza daje nam uvid u frekvencijski sadržaj analiziranog signala.
- Pod pojmom "frekvencijski sadržaj" podrazumijevaju se harmonijske funkcije.
- Harmonijske funkcije nisu lokalizirane u vremenu.
- Stoga rezultat analize nema eksplicitnu vremensku dimenziju.

3

Motivacija za T-F analizu

- Signal promjenjivih svojstava: dva sinusa.



- Vide se ili vremenski ili frekvencijski odnosi.

4

Motivacija za T-F analizu

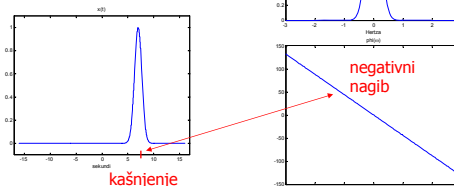
- Vremenski odnosi su ugrađeni u frekvencijsku karakteristiku, ali nisu uvijek eksplicitno vidljivi.
- Poznata mjera, koja se dobiva iz fazne karakteristike je grupno kašnjenje:

$$X(\omega) = A(\omega)e^{i\varphi(\omega)}, \quad T(\omega) = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}$$

5

Grupno kašnjenje $T(\omega) = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}$

- Grupno kašnjenje ima jasan smisao ako se "frekvencijski sadržaj" analiziranog signala događa u jednoj vremenskoj točki.



6

Grupno kašnjenje $T(\omega) = -\frac{d\phi(\omega)}{d\omega}$

- Grupno kašnjenje nije dobra mjera ako se identični frekvencijski sadržaj analiziranog signala događa u više vremenskih točaka.

7

Trenutna frekvencija

- Analogna mjera za kompleksne signale u vremenskoj domeni je trenutna frekvencija:

$$x(t) = a(t)e^{j\phi(t)}, \quad f(t) = \frac{d\phi(t)}{dt}$$
- Njezin je smisao također upitan ako u identičnoj vremenskoj točki postoji više od jedne frekvencije u signalu.

8

Vremensko frekvencijska (T-F) analiza

- Želimo takvu transformaciju da **istovremeno** opažamo vremenske i frekvencijske odnose

9

FT na vremenskom otvoru - STFT

- Umjesto $e^{j\omega t} \rightarrow g(t-\tau) e^{j\omega t}$
- $g(t)$ – lokalni analizirajući otvor željenih svojstava u obje domene, τ – pomak.
- Rezultat: **STFT**.

$$X(\tau, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) g^*(t-\tau) e^{-j\omega t} dt$$
- Za realne $g(t)$ ne treba konjugacija $*$ (mi ćemo to u nastavku često podrazumijevati).

10

STFT

$$X(\tau, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) g(t-\tau) e^{-j\omega t} dt$$

- Rezultat $X(\tau, \omega)$ očito:
 - ima dimenziju više od dimenzije signala,
 - ovisi o odabranom vremenskom otvoru.
- Funkcije razlaganja čine neprebrojiv i redundantan skup (po τ i ω):

$$\{g(t-\tau) e^{j\omega t}\}$$

11

STFT, razlučivost

$$\{g(t-\tau) e^{j\omega t}\}$$

- Usljed otvora g , funkcije razlaganja su **lokalizirane** u vremenu i frekvenciji.
- Pitanja:
 - gdje su centri koncentracije energije
 - i kolika je efektivna širina
- funkcija razlaganja u obje domene?

12

STFT, središta koncentracije

- Središte koncentracije energije u vremenskoj domeni:

$$t_c = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t |g(t-\tau) e^{j\omega t}|^2 dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t-\tau) e^{j\omega t}|^2 dt} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t |g(t-\tau)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t-\tau)|^2 dt}$$

- Za funkciju g konačne energije supstitucijom $t' = t + \tau$ dobivamo $t_c = t_g + \tau$.
- Najčešći izbor je g simetrična oko nule ($t_g = 0$), a tada je $t_c = \tau$.
- Središte koncentracije je u potpunosti određeno vremenskim pomakom τ , a veza je linearna.

13

STFT, središta koncentracije

- U frekventijskoj domeni (oznaka w) imamo:

$$\{g(t-\tau) e^{j\omega t}\} \circ \circ \{G(w-\omega) e^{j(w-\omega)\tau}\}$$

- Središte koncentracije u frekventijskoj domeni je:

$$w_c = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} w |G(w-\omega) e^{j(w-\omega)\tau}|^2 dw}{\int_{-\infty}^{+\infty} |G(w-\omega) e^{j(w-\omega)\tau}|^2 dw} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} w |G(w-\omega)|^2 dw}{\int_{-\infty}^{+\infty} |G(w-\omega)|^2 dw} = w_G + \omega.$$

- Najčešći izbor je niskopojasni $G(w)$ simetričan oko nule ($w_G = 0$), a tada je $w_c = \omega$. Veza je linearna.

14

STFT, efektivne širine

- Vremenska efektivna širina:

$$\Delta_t^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (t-\tau)^2 |g(t-\tau) e^{j\omega t}|^2 dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t-\tau) e^{j\omega t}|^2 dt} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (t')^2 |g(t')|^2 dt'}{\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t')|^2 dt'} = \Delta_g^2$$

- Frekventijska efektivna širina:

$$\Delta_f^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (w-\omega)^2 |G(w-\omega) e^{j(w-\omega)\tau}|^2 dw}{\int_{-\infty}^{+\infty} |G(w-\omega) e^{j(w-\omega)\tau}|^2 dw} = \dots = \Delta_G^2$$

15

STFT, razlučivost

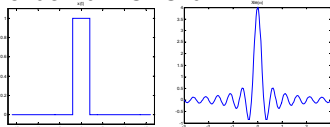
$$\{g(t-\tau) e^{j\omega t}\}$$

- Centri koncentracije energije funkcija razlaganja u obje domene su **linearno ovisni** o pomaku τ i frekvenciji ω .
- Efektivna širina funkcija razlaganja u obje domene je **konstantna** i definirana svojstvima vremenskog otvora.
- Odnos širina zadaje princip neodređenosti.

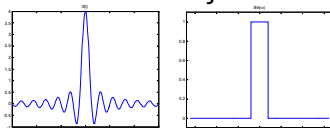
16

Izbor otvora

- Pravokutni u vremenu



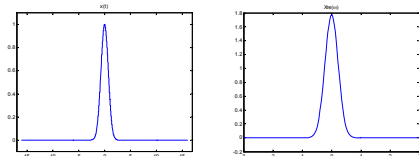
- Pravokutni u frekvenciji



17

Izbor otvora

- Idealna lokalizacija u jednoj domeni uzrokuje lošu lokalizaciju u drugoj.
- Najmanji produkt efektivnih širina daje Gaussov otvor.



18

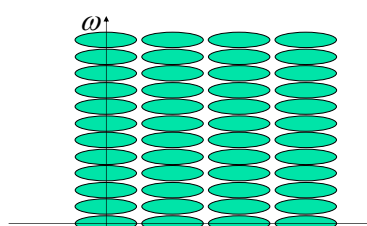
Razlučivost u T-F ravnini



- Središta elipsi predstavljaju centre funkcija razlaganja (τ, ω), a dimenzije efektivne širine.
- Svojstva, odnosno geometrija funkcija razlaganja u T-F ravnini je **konstantna**.

19

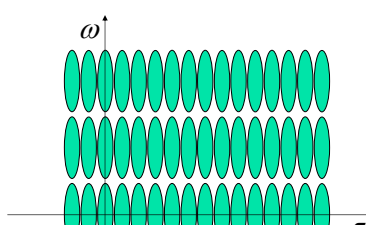
Razlučivost u T-F ravnini



- Smanjenje efektivne širine u jednoj domeni (povećanje rezolucije) dovodi do povećanja u drugoj (smanjenje rezolucije).

20

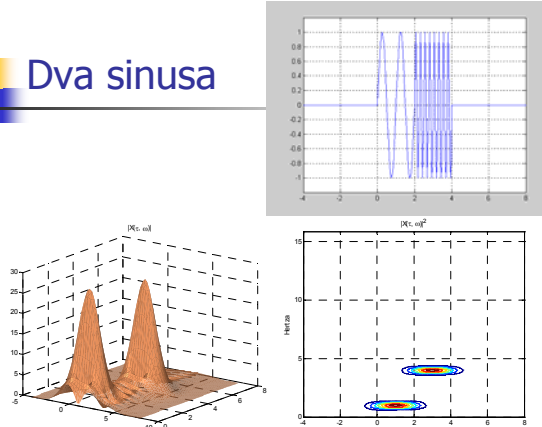
Razlučivost u T-F ravnini



- Smanjenje efektivne širine u jednoj domeni (povećanje rezolucije) dovodi do povećanja u drugoj (smanjenje rezolucije).

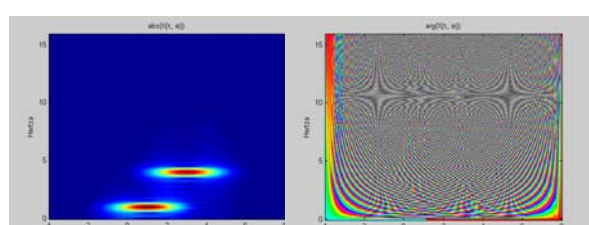
21

Dva sinusa



22

Dva sinusa, Gaussov otvor



- Lijevo: amplituda, desno faza

23

Dva sinusa, širi Gaussov otvor



- Veća neodređenost u vremenu, manja u frekvenciji.

24

Dva sinusa, uži Gaussov otvor

- Veća neodređenost u frekvenciji, manja u vremenu.

25

STFT, inverzna formula

$$X(\tau, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)g^*(t-\tau) e^{-j\omega t} dt$$

- Analogijom s Fourierovim integralom, pretpostavimo da postoji inverzna formula oblika:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi C} \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} \int_{\omega=-\infty}^{+\infty} X(\tau, \omega) h(t-\tau) e^{j\omega t} d\omega d\tau$$

- gdje je h za sada nepoznata funkcija, a C nepoznata konstanta.

26

STFT, inverzna formula

$$x(t) = \frac{1}{2\pi C} \int_{\tau} \int_{\omega} \overbrace{x(t')g^*(t'-\tau) e^{-j\omega t'}}^{X(\tau, \omega)} h(t-\tau) e^{j\omega t} d\omega d\tau$$

- Promijenimo redoslijed integracije:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi C} \int_{t'} x(t') \int_{\omega} \underbrace{e^{-j\omega(t'-t)}}_{2\pi\delta(t'-t)} d\omega \int_{\tau} g^*(t'-\tau) h(t-\tau) d\tau dt'$$

- Integral preko Diracove funkcije lako riješimo.

27

STFT, inverzna formula

$$x(t) = \frac{1}{C} x(t) \int_{\tau} g^*(t-\tau) h(t-\tau) d\tau$$

- Očito, za jednakost mora važiti:

$$\int_x g^*(x) h(x) dx = C$$

- Dobar izbor:

$$h(t) = g(t), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 dt = \|g\|^2 = C.$$

28

STFT, inverzna formula

- STFT transformacijski par je:

$$X(\tau, \omega) = \int_t x(t)g^*(t-\tau) e^{-j\omega t} dt,$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi\|g\|^2} \int_{\tau} \int_{\omega} X(\tau, \omega) g(t-\tau) e^{j\omega t} d\omega d\tau;$$

- uz jedini uvjet da je otvor g konačne energije.
- Ako se g odabere takav da mu je energija jednaka 1, izraz se pojednostavljuje.

29

Postupak računanja STFT

- A) Kao niz Fourierovih transformacija za različite vremenske pomake τ :

$$X(\tau, \omega) = \int_t [x(t)g^*(t-\tau)] e^{-j\omega t} dt,$$

$$X(\tau, \omega) = \text{Fourier}[x(t)g^*(t-\tau)].$$

30

Postupak računanja STFT

- B) Kao slog filtracija za različite frekvencijske pomake ω :

$$X(\tau, \omega) = \int_t [x(t) \cdot e^{-j\omega t}] g^*(t - \tau) dt.$$
- Za $\omega = 0$ važi:

$$X(\tau, 0) = \int_t x(t) g^*[-(\tau - t)] dt.$$
- Dobiveni izraz predstavlja konvolucijski integral funkcija $x(t)$ i $g^*(-t)$.

31

Postupak računanja STFT

- Konvolucija $x(t)$ i $g^*(-t)$ odgovara filtriranju:

$$x \rightarrow [G^*(-\omega)] \rightarrow X(\tau, 0)$$
- Za $\omega \neq 0$ imamo:

$$X(\tau, \omega) = \int_t [x(t) \cdot e^{-j\omega t}] g^*[-(\tau - t)] dt.$$
- što možemo prikazati kao:

$$x \xrightarrow{e^{-j\omega t}} \oplus [G^*(-\omega)] \rightarrow X(\tau, \omega)$$
- Množenju sa $e^{-j\omega t}$ odgovara pomak u Fourierovoj domeni: $X(\omega + \omega)$.

32

STFT kao slog filtera

- Jednostavnom supstitucijom frekvencijski pomak signala možemo nadomjestiti frekvencijskim pomakom filtra.
- Konačno, STFT možemo računati slogom ekvidistantnih filtera:

33

Diskretizacija STFT

$$X(\tau, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) g^*(t - \tau) e^{-j\omega t} dt$$

- Diskretizacija usklađena s razlučivošću:
 - $\tau = mT$; $\omega = k\Omega$.

$$X[mT, k\Omega] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) g^*(t - mT) e^{-jk\Omega t} dt$$

34

Diskretizacija STFT

$$X[mT, k\Omega] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) g^*(t - mT) e^{-jk\Omega t} dt$$

- Funkcije razlaganja čine prebrojiv skup:

$$\{g_{m,k}(t)\} \quad g_{m,k}(t) = g(t - \underbrace{mT}_{\text{diskretni vremenski pomak}}) \underbrace{e^{jk\Omega t}}_{\text{diskretni frekvencijski pomak}}$$

35

Diskretizacija STFT

- Da li se iz diskretnog skupa koeficijenata $X[m, k]$ može restaurirati analizirani signal $x(t)$ i to na numerički stabilan način?

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X[m, k] \cdot g_{m,k}(t)$$
- Rekonstrukcijska (inverzna) formula poznata je pod nazivom **Gaborova ekspanzija** signala.
- $X[m, k]$ je mjera sadržaja $x(t)$ na lokaciji $mT, k\Omega$.
- Kada je moguća rekonstrukcija?

36

Potrebna svojstva

- Signal konačne energije mora se preslikati u spektar konačne energije (ne nužno iste).

- Energija signala:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

- Energija spektra:

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X[m, k]|^2$$

- Uvjet vodi na formulaciju:

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X[m, k]|^2 \leq B \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

B je neka pozitivna konstanta

37

Potrebna svojstva

- Inverzna transformacija mora spektar konačne energije vratiti u signal konačne energije.

- Uvjet vodi na formulaciju:

$$A \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \leq \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X[m, k]|^2$$

A je neka pozitivna konstanta

- Oba uvjeta zajedno:

$$A \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \leq \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X[m, k]|^2 \leq B \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt,$$

$$0 < A \leq B < \infty.$$

38

Dovoljan uvjet

- Rekonstrukcija je moguća i to na numerički stabilan način ako postoje dvije konstante A i B za koje vrijedi:

$$A \underbrace{\|x\|^2}_{\text{energija signala}} \leq \underbrace{\sum_{m,k} |X[m, k]|^2}_{\text{energija koeficijenata}} \leq B \underbrace{\|x\|^2}_{\text{energija signala}}$$

$$0 < A \leq B < \infty$$

- Razlaganje može biti i redundantno ili neuniformno, a konstante A i B zadaju energetske okvir transformacije (*engl. frame*).

39

Dovoljan uvjet

- Kako u konkretnom slučaju Gaborove ekspanzije pronaći zadovoljavajuće funkcije razlaganja $\{g_{m,k}(t)\}$?
- Teoriju okvira (*eng. frame theory*) za slučaj GE, odnosno diskretne STFT, izučavali su Weyl, Heisenberg, Gabor i mnogi drugi.
- Jedan od važnijih rezultata je teorem otipkavanja.

40

Nužan uvjet rekonstrukcije

- $T\Omega > 2\pi$ podotipkavanje
 - rekonstrukcija nije moguća.
- $T\Omega = 2\pi$ granični (kritični) slučaj
 - moguća rekonstrukcija,
 - ne mogu se postići dobra svojstva lokalizacije u obje domene.
- $T\Omega < 2\pi$ nadotipkavanje
 - moguća rekonstrukcija,
 - redundantno razlaganje,
 - mogu se postići dobra svojstva u obje domene.

41

Teme predavanja

- Motivacija za nejednoliku razlučivost
- CWT – Kontinuirana wavelet transformacija
 - definicija,
 - svojstva,
 - primjeri.
- DWT - Diskretna wavelet transformacija
 - definicija,
 - svojstva,
 - DWT filterski slog.

42

Motivacija za nejednoliku razlučivost

- Razlučivost razlaganja je kod STFT-a određena svojstvima vremenskog otvora.
- Odabrani kompromis uslijed principa neodređenosti vrijedi za cijelu T-F ravninu.
- Često jedna vremenska točka analiziranog signala ima složen frekvencijski sadržaj.
- Za takve signale bi odgovarala analiza koja nema konstantnu rezoluciju.
- U tom slučaju bi ukupno određenje složenog signala moglo biti preciznije od određenja u jednoj točki T-F ravnine.

43

Kontinuirana wavelet transformacija

- Umjesto $g(t-\tau) e^{j\omega t} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right)$
- $\psi(t)$ – lokalni analizirajuća funkcija željenih svojstava u obje domene, τ – pomak, a – skala.
- Rezultat: CWT.

$$X(\tau, a) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \psi^*\left(\frac{t-\tau}{a}\right) dt$$
- Za realne $\psi(t)$ ne treba konjugacija $*$ (mi ćemo to u nastavku često podrazumijevati).

44

CWT

$$X(\tau, a) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \psi^*\left(\frac{t-\tau}{a}\right) dt$$

- Rezultat $X(\tau, a)$:
 - ima dimenziju više od dimenzije signala,
 - ovisi o odabranom "valiću" $\psi(t)$,
 - funkcija razlaganja nije ograničena samo na kompleksnu harmonijsku funkciju $e^{j\omega t}$,
 - "valić" $\psi(t)$ osigurava željena svojstva razlaganja,
 - analizirajuću funkciju pomičemo za τ , stežemo ili rastežemo za skalu a i uspoređujemo s $x(t)$,
 - "skala" a je veličina obrnuto proporcionalna frekvenciji.

45

CWT, razlučivost

$$\frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right)$$

- Otvor ψ određuje **lokalizaciju** u vremenu i skali.
- Pitanja:
 - gdje su centri koncentracije energije
 - i kolika je efektivna širina
- funkcija razlaganja u obje domene?

46

CWT, središta koncentracije

- Središte koncentracije energije u vremenskoj domeni:

$$t_c = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t \left| \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right) \right|^2 dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right) \right|^2 dt} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (at' + \tau) \left| \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi(t') \right|^2 a dt'}{\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi(t') \right|^2 a dt'} = a \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t' |\psi(t')|^2 dt'}{\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t')|^2 dt'} + \tau = at_\psi + \tau.$$

47

CWT, središta koncentracije

- Konačno, središte koncentracije energije u vremenskoj domeni je:

$$t_c = at_\psi + \tau.$$
- Čest (ali ne i jedini) izbor je ψ simetrična oko nule ($t_\psi = 0$), a tada je $t_c = \tau$.
- Središte koncentracije je u potpunosti određeno vremenskim pomakom τ , a veza je **linearna**.

48

CWT, središta koncentracije

- U frekventijskoj domeni imamo:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right) \right\} \circ \circ \left\{ \sqrt{a} \cdot \Psi(a\omega) e^{-j\omega\tau} \right\}$$
- Središte koncentracije u frekventijskoj domeni je:

$$\omega_c^+ = \frac{\int_0^{+\infty} \omega |\sqrt{a} \cdot \Psi(a\omega) e^{-j\omega\tau}|^2 d\omega}{\int_0^{+\infty} |\sqrt{a} \cdot \Psi(a\omega) e^{-j\omega\tau}|^2 d\omega} = \frac{\int_0^{+\infty} \omega |\Psi(a\omega)|^2 d\omega}{\int_0^{+\infty} |\Psi(a\omega)|^2 d\omega} = \frac{\omega_\Psi^+}{a}$$
- $\omega_c^+ = \omega_\Psi^+ / a$.
- Veza središta ω_c i skale a nije linearna!

49

CWT, efektivne širine

- Vremenska efektivna širina:

$$\Delta_t^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (t-\tau)^2 \left| \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right) \right|^2 dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right) \right|^2 dt} = \dots = a^2 \cdot \Delta_\Psi^2$$
- Frekventijska efektivna širina:

$$\Delta_f^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (\omega - \omega_\Psi)^2 |\sqrt{a} \cdot \Psi(a\omega) e^{-j\omega\tau}|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} |\sqrt{a} \cdot \Psi(a\omega) e^{-j\omega\tau}|^2 d\omega} = \dots = \frac{\Delta_\Psi^2}{a^2}$$

$$\Delta_t = a \cdot \Delta_\Psi$$

$$\Delta_f = \frac{\Delta_\Psi}{a}$$

50

CWT, razlučivost

$$t_c = at_\Psi + \tau,$$

$$\omega_c = \frac{\omega_\Psi}{a}.$$

$$\Delta_t = a \cdot \Delta_\Psi,$$

$$\Delta_f = \frac{\Delta_\Psi}{a}.$$

$$\Delta_t \cdot \Delta_f = const.$$

- Centri koncentracije energije funkcija razlaganja u obje domene su **linearno** ovisni o pomaku τ i **nelinearno** ovisni o skali a .
- Efektivna širina funkcija razlaganja u obje domene je **promjenjiva**, ali je produkt širina **konstantan** i određen svojstvima otvora Ψ .

51

Razlučivost u T-F ravnini

- Središta elipsi predstavljaju centre funkcija razlaganja ($\tau, \omega \sim 1/a$), a dimenzije efektivne širine.
- Svojstva, odnosno geometrija funkcija razlaganja u T-F ravnini je **promjenjiva**!!

52

Razlučivost: CWT i STFT

CWT

STFT

- STFT: konstantna rezolucija na cijeloj T-F ravnini.
- CWT:
 - finija rezolucija u frekventijskoj domeni za NF,
 - finija rezolucija u vremenskoj domeni za VF.

53

Primjeri wavelet funkcija

- Morlett: $\psi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \cos 5t$.

54

Primjeri wavelet funkcija

- Sombrero: $\psi(t) = C(1-t^2)e^{-\frac{t^2}{2}}$.

55

Usporedba CWT-STFT

- CWT Morlett
- STFT (Gauss, realni dio)

- Širina otvora se mijenja, broj valića isti.
- Širina otvora konstantna, broj valića se mijenja.

56

Usporedba CWT-STFT

- CWT Morlett
- STFT (Gauss)

- Širina otvora se mijenja, produkt $\Delta_t \Delta_f$ je konstantan.
- Širina otvora konstantna.

57

CWT na primjeru

- Analizirani signal: dva sinusa, Morletov wavelet. $\psi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \cos(5t)$

58

CWT na primjeru

Absolute Values of Ca, b Coefficients for a = 0.0625 0.068157 0.074325 0.081052 0.088388 ...

- 64
- 41.4989
- 26.9087
- 17.4481
- 11.3137
- 7.33603
- 4.75683
- 3.08442
- 2
- 1.29684
- 0.840896
- 0.545254
- 0.353553
- 0.229251
- 0.148651
- 0.0963882
- 0.0625

59

CWT, inverzna formula

$$X(\tau, a) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \psi^* \left(\frac{t-\tau}{a} \right) dt$$

- Analogijom pretpostavimo da postoji inverzna formula oblika:

$$x(t) = \frac{1}{C} \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} \int_{a=0}^{+\infty} X(\tau, a) \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi \left(\frac{t-\tau}{a} \right) da d\tau$$

- gdje je C neka nepoznata konstanta.

60

CWT, inverzna formula

- Izvod je sličan ali složeniji od STFT-a, pa ga ovdje ne reproduciramo.
- Pokazuje se da nepoznata konstanta iznosi:

$$C = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{\omega} d\omega$$

- $\Psi(\omega)$ je Fourierova transformacija od $\psi(t)$.
- Uvjet prihvatljivosti funkcije ψ ujedno je i određen gornjim izrazom ($0 < C < \infty$).

61

CWT, inverzna formula

- Lako se vidi da je za konačan iznos:

$$C = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{\omega} d\omega$$

- nužno da je $\Psi(0) = 0$.
- Valić ne smije imati istosmjernu komponentu, odnosno:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0.$$

62

CWT, transformacijski par

- Konačno imamo transformacijski par:

$$X(\tau, a) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \psi^* \left(\frac{t-\tau}{a} \right) dt,$$

$$x(t) = \frac{1}{C} \int_{\tau} \int_a X(\tau, a) \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi \left(\frac{t-\tau}{a} \right) da d\tau;$$

- uz ($0 < C < \infty$):

$$C = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{\omega} d\omega, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0.$$

63

Postupak računanja CWT

- A) U Fourierovoj domeni:

$$X(\tau, a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \psi^* \left(\frac{t-\tau}{a} \right) dt,$$

$$X(\tau, a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) \sqrt{a} \cdot \Psi(-a\omega) e^{-j\omega\tau} d\omega,$$

$$X(\tau, a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(-\omega) \cdot \Psi(a\omega) e^{j\omega\tau} d\omega,$$

- Dobiveni izraz je $Fourier^{-1}[X(-\omega)\Psi(a\omega)]$.

64

Postupak računanja CWT

- B) Kao slog filtracija za različite skale a :

$$X(\tau, a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \psi^* \left[-\frac{1}{a}(\tau-t) \right] dt,$$

- Za $a=1$ važi:

$$X(\tau, 1) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \psi^* [-(\tau-t)] dt,$$

- Dobiveni izraz predstavlja konvolucijski integral funkcija $x(t)$ i $\psi^*(-t)$.

65

Postupak računanja CWT

- Konvolucija $x(t)$ i $\psi^*(-t)$ odgovara pojasnopropusnom filtriranju:

$$x \rightarrow \boxed{\Psi^*(-\omega)} \rightarrow X(\tau, 1)$$

- Za $a \neq 1$ imamo:

$$X(\tau, a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \psi^* \left[-\frac{1}{a}(\tau-t) \right] dt,$$

$$x \rightarrow \boxed{\Psi^*(-a\omega)} \rightarrow X(\tau, a)$$

- Pojasnopropusni filter je promijenjene širine i središnje frekvencije.

66

CWT kao slog filtara

- Neka je $a = 1, 2, 4, \dots$
- CWT možemo računati slogom nejednakih filtara:

Označimo središte pojasa sa ω_c i efektivnu širinu filtra sa Δ .

Središte pojasa je $\omega_c / 2$, a efektivna širina je $\Delta / 2$.

Središte pojasa je $\omega_c / 4$, a efektivna širina je $\Delta / 4$.

67

Diskretizacija WT

$$X(\tau, a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \psi^* \left(\frac{t - \tau}{a} \right) dt,$$

- Diskretizacija usklađena s razlučivošću:

$a = a_0^k$ - logaritamska podjela u skali (frekvenciji)

$\tau = mT a$ - pomak usklađen s iznosom skale

tj. $\tau = mT a_0^k$

68

Diskretizacija WT

Funkcije razlaganja $\psi_{m,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{a_0^k}} \psi \left(\frac{t}{a_0^k} - mT \right)$

DWT $X[m, k] = \frac{1}{\sqrt{a_0^k}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \psi \left(\frac{t}{a_0^k} - mT \right) dt$

nejednolika kvantizacija T-F ravnine

69

Uvjet rekonstrukcije

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X[m, k] \cdot \psi_{m,k}(t)$$

- Rekonstrukcija je moguća i to na numerički stabilan način ako postoje dvije konstante A i B za koje vrijedi:

$$A \underbrace{\|x\|^2}_{\text{energija signala}} \leq \underbrace{\sum_{m,k} \|X[m, k]\|^2}_{\text{energija koeficijenata}} \leq B \underbrace{\|x\|^2}_{\text{energija signala}}$$

$0 < A \leq B < \infty$

- Kod DWT-a **ne postoji** ekvivalent nužnog uvjeta $T\Omega \leq 2\pi$, koji je vrijedio za Gaborovu ekspanziju₇₀

Oktavna DWT

- Kod waveleta se lako mogu pronaći ortogonalne baze s dobrim lokalizirajućim svojstvima u obje domene (što nije bio slučaj s Gaborom).
- Za realizaciju čest izbor je $a_0 = 2$ tj. oktavna podjela frekvencijske skale.
- Prednost: **možućnost brze realizacije filteraskim slogovima.**

$$\psi_{m,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^k}} \psi \left(\frac{t}{2^k} - mT \right)$$

71

Oktavna DWT kao slog filtara

- Ponovno prikažimo CWT filteraski slog. Označimo $a = 2^0, 2^1, 2^2, \dots$ i otipkamo uzorke rezultata.

- Zbrojena širina svih filtara $j > k$ jednaka je širini k -tog filtra.

Problem: NP filteri vrlo visokog reda! 72

Oktavna DWT kao slog filtara

- Ideja za rekurzivnu realizaciju

Kaskadno realizirani filtri mogu biti značajno nižeg reda.

73

Filtarski slog s decimacijom

- Na prethodnom slajdu imali smo kontinuirane filtre.
- Ovdje imamo slog diskretnih filtara s decimacijom.
- Decimacija s faktorom 2 znači odbacivanje svakog drugog uzorka.
- Da li je potpuna rekonstrukcija moguća?
- Da li je moguće ovakav filtarski slog dovesti u vezu sa oktavnom DWT?

74

Decimator

- U vremenskoj domeni: $v[n] = x[2n]$.
- Što imamo u frekvencijskoj domeni?
- Kreirajmo iz $x[n]$ pomoćni signal $u[n]$ takav da mu je svaki drugi uzorak nula:

$$u[n] = \begin{cases} x[n] & n \text{ paran,} \\ 0 & n \text{ neparan.} \end{cases}$$

75

Spektar decimiranog signala

$$u[n] = \begin{cases} x[n] & n \text{ paran,} \\ 0 & n \text{ neparan.} \end{cases}$$

- Spektar takvog signala je:

$$U(e^{j\omega}) = \sum_{n \text{ paran}} x[n] \cdot e^{-j\omega n}$$

- Želimo zapisati sumu po svim n .
- Iskoristit ćemo činjenicu:

$$e^{-j\omega n} = \begin{cases} +e^{-j(\omega+\pi)n} & n \text{ paran} \\ -e^{-j(\omega+\pi)n} & n \text{ neparan} \end{cases}$$

76

Spektar decimiranog signala

$$\sum_{n \text{ paran}} x[n] \cdot e^{-j\omega n} = \frac{1}{2} \sum_n x[n] \cdot e^{-j\omega n} + \frac{1}{2} \sum_n x[n] \cdot e^{-j(\omega+\pi)n}$$

- Članovi uz neparne n se međusobno dokidaju.

$$U(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} [X(e^{j\omega}) + X(e^{j(\omega+\pi)})]$$

- $v[n] = u[2n]$.
- Kako $u[n]$ sadrži samo parne uzorke, za spektre vrijedi $V(\omega) = U(\omega/2)$:

$$V(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} [X(e^{j\omega/2}) + X(e^{j(\omega/2+\pi)})]$$

77

Spektar signala frekvencijski ograničenog na $\pm\pi/2$.

Spektar decimiranog signala.

78

Spektar decimiranog signala

- Da signal nije bio frekventijski ograničen na $\pm\pi/2$, decimacija bi osim rastezanja uzrokovala i preklapanje spektra (*eng. aliasing*).

79

Decimirani signal u Z domeni

- Identičnim postupkom uz zamjenu $z = e^{j\omega}$ dobivamo sljedeće veze:

$$U(z) = \frac{1}{2} [X(z) + X(ze^{j\pi})] = \frac{1}{2} [X(z) + X(-z)]$$

$$V(z) = U\left(z^{\frac{1}{2}}\right),$$

$$V(z) = \frac{1}{2} \left[X(z^{\frac{1}{2}}) + X(-z^{\frac{1}{2}}) \right]$$

80

Interpolator

$x[n] \xrightarrow{\uparrow} u[n]$

- U vremenskoj domeni:

$$u[2n] = x[n],$$

$$u[2n+1] = 0.$$

81

Interpolator

$x[n] \xrightarrow{\uparrow} u[n]$

- U frekventijskoj domeni:

$$U(e^{j\omega}) = \sum u[n] \cdot e^{-j\omega n} = \sum u[2n] \cdot e^{-j\omega 2n}$$

$$= \sum x[n] \cdot e^{-j\omega 2n} = X(e^{j2\omega})$$

Neparni uzorci su nula.

- Rezultat je stisnuti spektar: U Z-domeni:

$$U(e^{j\omega}) = X(e^{j2\omega}), \quad U(z) = X(z^2).$$

82

Interpolator

- Spektar interpoliranog signala se suzio, a period spektra interpoliranog signala je π (ne više 2π)!
- Imamo pojavu ponavljajućih "slika" spektra.

83

Decimator + interpolator

$x[n] \xrightarrow{\downarrow} \xrightarrow{\uparrow} u[n]$

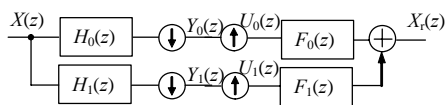
- U vremenskoj domeni: $u[n] = \begin{cases} x[n/2] & n \text{ paran,} \\ 0 & n \text{ neparan.} \end{cases}$
- Već smo pokazali da je spektar takvog signala:

$$U(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} [X(e^{j\omega}) + X(e^{j(\omega+\pi)})],$$

$$U(z) = \frac{1}{2} [X(z) + X(-z)].$$

84

Filtarski slog s decimacijom i interpolacijom



$$F_0(z) \cdot \frac{1}{2} [H_0(z)X(z) + H_0(-z)X(-z)] +$$

$$F_1(z) \cdot \frac{1}{2} [H_1(z)X(z) + H_1(-z)X(-z)] = z^{-L} X(z)$$

- Ideja: neka se aliasing komponente (komponente koje su posljedica decimacije i interpolacije) međusobno poništavaju.

85

Potpuna rekonstrukcija

- Uvjet potpune rekonstrukcije možemo razdvojiti na dva dijela. Prvi je:

$$F_0(z) \cdot \frac{1}{2} [H_0(-z)X(-z)] + F_1(z) \cdot \frac{1}{2} [H_1(-z)X(-z)] = 0$$

$$F_0(z) \cdot H_0(-z) + F_1(z) \cdot H_1(-z) = 0$$

- Aliasing komponente iz dva filtra moraju biti istog iznosa i suprotnog predznaka. Nadalje:

$$F_0(z) \cdot \frac{1}{2} [H_0(z)X(z)] + F_1(z) \cdot \frac{1}{2} [H_1(z)X(z)] = z^{-L} X(z)$$

$$F_0(z) \cdot H_0(z) + F_1(z) \cdot H_1(z) = 2z^{-L}$$

86

Uvjeti potpune rekonstrukcije

- Uvjet rekonstrukcije bez izobličenja:

$$F_0(z) \cdot H_0(z) + F_1(z) \cdot H_1(z) = 2z^{-L}$$
- Uvjet poništenja aliasinga:

$$F_0(z) \cdot H_0(-z) + F_1(z) \cdot H_1(-z) = 0$$
- Problem je, naravno, pronaći četvorku filtara željenih frekvencijskih karakteristika koji potpuno ili aproksimativno zadovoljavaju ova dva uvjeta.

87

Uvjeti PR u matricnoj formi

$$[F_0(z) \ F_1(z)] \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} H_0(z) & H_0(-z) \\ H_1(z) & H_1(-z) \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}_m(z)} = [2z^{-L} \ 0]$$

- Matrica \mathbf{H}_m naziva se još i analizirajuća modulacijska matrica.
- Nadopunimo li matricu F još jednim retkom, uz supstituciju $z \rightarrow -z$ dobivamo još jedan poznati oblik PR uvjeta u matricnoj formi.

88

Uvjeti PR u matricnoj formi

$$\underbrace{\begin{bmatrix} F_0(z) & F_1(z) \\ F_0(-z) & F_1(-z) \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}_m(z)} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} H_0(z) & H_0(-z) \\ H_1(z) & H_1(-z) \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}_m(z)} = \begin{bmatrix} 2z^{-L} & 0 \\ 0 & 2(-z)^{-L} \end{bmatrix}$$

- Matrica \mathbf{F}_m naziva se još i sintetizirajuća modulacijska matrica.
- Kraće zapisan uvjet potpune rekonstrukcije uz korištenje modulacijskih matrica i $L=0$ glasi:

$$\mathbf{F}_m(z) \cdot \mathbf{H}_m(z) = 2 \cdot \mathbf{I}$$

- Takav filtarski slog nazivamo **biortogonalnim**.

89

Potpuna rekonstrukcija u matricnoj formi

- Jednadžbe filtarskog sloga izražene pomoću modulacijske matrice:

$$\begin{bmatrix} U_0(z) \\ U_1(z) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} H_0(z) & H_0(-z) \\ H_1(z) & H_1(-z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(z) \\ X(-z) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y_0(z) \\ Y_1(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_0(z^{\frac{1}{2}}) \\ U_1(z^{\frac{1}{2}}) \end{bmatrix}$$

$$X_r(z) = z^{-L} X(z) = [F_0(z) \ F_1(z)] \cdot \begin{bmatrix} U_0(z) \\ U_1(z) \end{bmatrix}$$

90

Dizajn filtera

- Kako dizajnirati četvorku filtera H_0, F_0, H_1, F_1 ?
- Prijedlog: za poništenje *aliasinga* odabrati:

$$F_0(z) = H_1(-z), \quad F_1(z) = -H_0(-z)$$

- Očito, uvjet poništenja *aliasinga* je zadovoljen:

$$F_0(z) \cdot H_0(-z) + F_1(z) \cdot H_1(-z) = 0$$

$$H_1(-z) \cdot H_0(-z) - H_0(-z) \cdot H_1(-z) = 0$$

- Kako izgleda isti izbor u vremenskoj domeni?

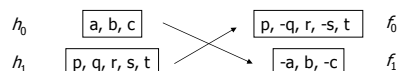
91

Dizajn filtera: poništenje *aliasinga*

$$F_0(z) = H_1(-z), \quad F_1(z) = -H_0(-z);$$

$$f_0[n] = (-1)^n \cdot h_1[n], \quad f_1[n] = -(-1)^n h_0[n]$$

- Pretpostavimo da se radi o filterima s konačnim impulsnim odzivom.
- Naš izbor daje rješenje s alternirajućim predznacima impulsnog odziva:



92

Dizajn filtera: rekonstrukcija bez izobličenja

- Treba provjeriti i uvjet rekonstrukcije bez izobličenja:

$$F_0(z) \cdot H_0(z) + F_1(z) \cdot H_1(z) = 2z^{-L}$$

- U svakom od pribrojnika javlja se produkt filtera. Označimo "produkt filtre":

$$P_0(z) = F_0(z) \cdot H_0(z), \quad P_1(z) = F_1(z) \cdot H_1(z).$$

- P_0 je niskopropusni, a P_1 visokopropusni produkt filtera.

93

Dizajn filtera: rekonstrukcija bez izobličenja

- Uz naš izbor vrijedi:

$$P_1(z) = F_1(z) \cdot H_1(z) = -H_0(-z) \cdot H_1(z) = -H_0(-z) \cdot F_0(-z),$$

$$P_1(z) = -P_0(-z).$$

- Uvjet rekonstrukcije bez izobličenja tad glasi:

$$F_0(z) \cdot H_0(z) - F_0(-z) \cdot H_0(-z) = P_0(z) - P_0(-z) = 2z^{-L}$$

- Konačno, recept se sastoji od dva koraka:
 - dizajn NP filtra P_0 koji zadovoljava gornji uvjet,
 - faktorizacija P_0 u $F_0 H_0$. Izračunavanje F_1 i H_1 .

94

Dizajn NP filtra P_0

$$P_0(z) = F_0(z) \cdot H_0(z), \quad P_0(z) - P_0(-z) = 2z^{-L}.$$

- Red filtra P_0 određuje sumu redova filtera F_0 i H_0 .
- Ako se radi o FIR filterima, dužina impulsnog odziva P_0 je zadana sumom dužina F_0 i H_0 .
- Postoje brojni načini za dizajn P_0 .
- Uočimo važno svojstvo $P_0(z)$: sve **neparne potencije** od z imaju koeficijente jednake **nuli**, osim **uz z^{-L}** gdje je koeficijent jednak **jedan**.

95

Dizajn NP filtra P_0

- Napravit ćemo primjer.
- Neka je P_0 FIR filter dužine 6.

$$P_0(z) = p_0[0] + p_0[1]z^{-1} + p_0[2]z^{-2} + p_0[3]z^{-3} + p_0[4]z^{-4} + p_0[5]z^{-5}$$

$$P_0(-z) = p_0[0] - p_0[1]z^{-1} + p_0[2]z^{-2} - p_0[3]z^{-3} + p_0[4]z^{-4} - p_0[5]z^{-5}$$

$$P_0(z) - P_0(-z) = 0 + 2p_0[1]z^{-1} + 0 + 2p_0[3]z^{-3} + 0 + 2p_0[5]z^{-5} = 2z^{-L}$$

- Uz $L=3$, slijedi:

$$p_0[1] = 0, \quad p_0[3] = 1, \quad p_0[5] = 0.$$

96

Dizajn NP filtra P_0

- Očito, parne potencije nedostaju u izrazu $P_0(z) - P_0(-z)$; znači, radi se o neparnoj funkciji.
- Očito, L je neparan.
- Zgodniji oblik možemo dobiti ako normiramo (pomnožimo) $P_0(z)$ sa z^L kako bi ga centrirali:

$$P(z) = z^L P_0(z),$$

$$P(-z) = (-z)^L P_0(-z) = -z^L P_0(-z),$$

- jer je L neparan.

97

Polupojasni filter

- Konačno, uvjet PR glasi:
 $P(z) + P(-z) = 2$.
- Takav P se naziva "polupojasnim filtrom".
- Sve parne potencije u $P(z)$ su jednake nuli, osim konstantnog člana koji je jednak 1.
- Koefficienti uz neparne potencije $P(z)$ su varijable dizajna decimiranog filterskog sloga s dva pojasa i potpunom rekonstrukcijom.

98

Primjer $P_0(z)$

- Jedan (dobar) izbor za $P_0(z)$ je:
 $P_0(z) = (1 + z^{-1})^{2p} Q_{2p-2}(z)$.
- Prvi član osigurava nultočku višestrukosti $2p$ na frekvenciji $\omega = \pi$.
- Drugi član je polinom takav da vrijedi PR uvjet.
- Ako je polinom reda $2p-2$, pokazuje se da je $Q(z)$ jednoznačan.
- Takav filter nazivamo binomnim ili maksimalno glatkim (*eng. binomial, maxflat*).

99

Primjer $P_0(z)$

- Za $p=1$ imamo:

$$P_0(z) = (1 + z^{-1})^2 \cdot q_0$$

- Polinom $Q(z)$ je reda $2 \cdot 1 - 2 = 0$.

$$P_0(z) = (1 + 2z^{-1} + z^{-2}) \cdot q_0$$

$$P_0(z) - P_0(-z) = [(1 + 2z^{-1} + z^{-2}) - (1 - 2z^{-1} + z^{-2})] \cdot q_0,$$

$$P_0(z) - P_0(-z) = 4z^{-1} q_0 = 2z^{-L},$$

$$L = 1, \quad q_0 = 1/2.$$

$$P(z) = z^1 \cdot P_0(z) = \frac{z}{2} + 1 + \frac{z^{-1}}{2}.$$

100

Primjer $P_0(z)$

- Faktorizacija P_0 u $F_0 H_0$ ima više varijanti:

$$H_0(z) = 1/2$$

$$F_0(z) = (1 + z^{-1})^2$$

$$H_0(z) = (1 + z^{-1}) / \sqrt{2}$$

$$F_0(z) = (1 + z^{-1}) / \sqrt{2}$$

$$H_0(z) = (1 + z^{-1})^2$$

$$F_0(z) = 1/2$$

- Za primjene je posebno zanimljiv srednji izbor.
- Takvim se filterskim slogom realizira Haarova DWT.

101

Primjer $P_0(z)$

- Vrlo ilustrativan je slučaj $p=2$:

$$P_0(z) = (1 + z^{-1})^4 (q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}),$$

$$P_0(z) = (1 + 4z^{-1} + 6z^{-2} + 4z^{-3} + z^{-4}) (q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}),$$

- Za centriranje množimo sa z^3 :

$$P(z) = (1 + 4z^{-1} + 6z^{-2} + 4z^{-3} + z^{-4}) (q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}) z^3,$$

$$P(z) = q_0 z^3 + (4q_0 + q_1) z^2 + (6q_0 + 4q_1 + q_2) z$$

$$+ 4q_0 + 6q_1 + 4q_2$$

$$+ (q_0 + 4q_1 + 6q_2) z^{-1} + (q_1 + 4q_2) z^{-2} + q_2 z^{-3}.$$

102

Primjer $P_0(z)$

- Članovi uz parne potencije moraju biti nula, a konstantni član mora biti jedan.
- To daje 3 jednadžbe s 3 nepoznanice:

$$4q_0 + q_1 = 0,$$

$$4q_0 + 6q_1 + 4q_2 = 1,$$

$$q_1 + 4q_2 = 0.$$

- a rješenje je: $q_0 = -\frac{1}{16}$, $q_1 = \frac{1}{4}$, $q_2 = \frac{1}{16}$.

$$\begin{aligned} P_0(z) &= \frac{1}{16}(1+z^{-1})^4(-1+4z^{-1}-z^{-2}), \\ &= \frac{1}{16}(1+z^{-1})^4(c-z^{-1})(-c^{-1}+z^{-1}), \quad c = 2 - \sqrt{3}. \end{aligned}$$

103

Faktorizacija $P_0(z)$

- Za F_0 ili H_0 (u bilo kojem redosljedu) biramo:

$$\frac{1}{(1+z^{-1})} \quad \text{red} = 0$$

$$(1+z^{-1})^2 \quad \text{ili} \quad (1+z^{-1})(c-z^{-1}) \quad \text{red} = 1$$

$$(1+z^{-1})^2 \quad \text{ili} \quad (1+z^{-1})(c-z^{-1}) \quad \text{red} = 2$$

$$(1+z^{-1})^3 \quad \text{ili} \quad (1+z^{-1})^2(c-z^{-1}) \quad \text{red} = 3$$

- Svaka od faktorizacija ima svojstva pogodna za određenu primjenu.
- Izbori faktora koji ne sadrže $(c-z^{-1})$ daju simetrične filtre: filtre s linearnom fazom.

104