Spektralne karakteristike slučajnih procesa

Prof. dr. sc. Hrvoje Babić
Prof. dr. sc. Damir Seršić
http://ts.zesoi.fer.hr

Spektar signala

- Fourierova transformacija: $x(t)$ o–> $X(\omega)$.

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,e^{-j\omega t}\,dt$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\,e^{j\omega t}\,dt$$

Fourierova transformacija

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

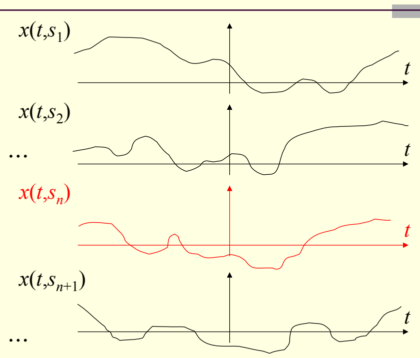
- Dovoljni (ne i nužni) uvjeti za postojanje $X(\omega)$ su:
- 1. Dirichletovi uvjeti – $x(t)$ je ograničena konačnim brojem maksimuma i minimuma te konačnim brojem diskontinuiteta na bilo kojem konačnom intervalu od t.
- 2. apsolutna integrabilnost $x(t)$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|dt<\infty.$$

Spektar signala

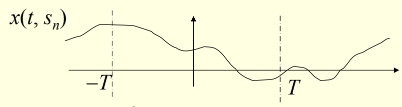
- Fourierova transformacija je uobičajena mjera frekvencijskog sadržaja determinističkih signala.
- Neprikladna mjera za slučajne procese: ne mora postojati za sve realizacije.
- U nastavku ćemo opisati prikladniju mjeru frekvencijskog sadržaja slučajnog procesa: gustoću spektra snage.

Slučajni proces $X(t, s)$



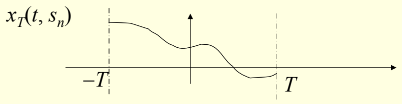
Spektar signala

- Realizacija beskonačnog trajanja: najčešće Fourierov integral divergira.
- Uzmemo konačni segment $[-T, T]$ jedne realizacije:



$$x_T(t,s_n)=\begin{cases} x(t,s_n) & -T<t<T \\ 0 & drugdje \end{cases}$$

Spektar signala



$$\int_{-T}^{T} |x_T(t)|\, dt < \infty$$

- T – konačan => možemo pretpostaviti apsolutnu konvergenciju.
- Fourierov spektar tada postoji: $$X_T(\omega) = \int_{-T}^{T} x_T(t)\, e^{-j\omega t}\, dt.$$

Energija i snaga signala

- Energija u intervalu $(-T, T)$:

$$\mathcal{E}(T) = \int_{-T}^{T} x_T^{\,2}(t)\, dt = \int_{-T}^{T} x^2(t)\, dt.$$

- Snaga: $$P(T) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x^2(t)\, dt$$

  = energija u jedinici vremena.

- Fourierov spektar $X_T(\omega)$ postoji, pa možemo koristiti Parsevalov teorem.

Snaga signala

- Parsevalov teorem za energije:

$$\mathcal{E}(T) = \int_{-T}^{T} x^2(t)\, dt \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X_T(\omega)|^2\, d\omega.$$

- Snaga = energija / vrijeme:

$$P(T) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x^2(t)\, dt \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{|X_T(\omega)|^2}{2T}}_{\text{gustoca sp. snage}}\, d\omega.$$

- Veći T => točniji izraz za snagu jedne realizacije $x(t, s_n)$ slučajnog procesa $X(t, s)$.

Srednja snaga slučajnog procesa

- Kako prijeći od jedne realizacije $x(t, s_n)$ do slučajnog procesa $X(t, s)$?
- $P(T)$ je slučajna varijabla.
- Primijenimo operator očekivanja da dobijemo srednju snagu i formirajmo limes $T \to \infty$:

$$P_{XX} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} E\left[X^2(t)\right] dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{E[|X_T(\omega)|^2]}{2T}\, d\omega.$$

= srednja snaga slučajnog procesa $X(t, s)$.

Srednja snaga slučajnog procesa

- Srednja snaga procesa $X(t)$ je dana vremenskom srednjom vrijednošću $A\{\cdot\}$ drugog momenta:

$$P_{XX} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} E\left[X^2(t)\right] dt = A\left\{ E\left[X^2(t)\right]\right\}.$$

- Za stacionarni proces:

$$P_{XX} = E[\,X^2(t)] = \overline{X^2} = konst.$$

Gustoća spektra snage

- Parsevalov teorem nam je dao izraz:

$$P_{XX} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{E[\,|X_T(\omega)|^2\,]}{2T}\, d\omega.$$

- S druge strane, srednja snaga procesa može se izračunati integracijom gustoće spektra snage:

$$P_{XX} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega)\, d\omega,$$

$$S_{XX}(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{E[\,|X_T(\omega)|^2\,]}{2T}.$$

Gustoća spektra snage

- Dobiveni izraz:

$$S_{XX}(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{E[\,|X_T(\omega)|^2\,]}{2T}$$

- je važan rezultat kojim definiramo gustoću spektra snage (*eng. power density spectrum*) slučajnog procesa.
- $S_{xx}(\omega)$ je mjera srednjeg frekvencijskog sadržaja snage slučajnog procesa.
- Kraći naziv: spektar snage.

Svojstva gustoće spektra snage

1.) $S_{xx}(\omega) \geq 0$,
2.) $S_{xx}(-\omega) = S_{xx}(\omega)$ za realne procese,
3.) $S_{xx}(\omega)$ je uvijek realan,
4.) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega)\,d\omega = A\{E[X^2(t)]\} = P_{XX}$,
5.) $S_{\dot{X}\dot{X}}(\omega) = \omega^2 S_{XX}(\omega)$, $\dot{X}\dot{X} = \frac{dX(t)}{dt}$,
6.) Spektar snage i autokorelacijska funkcija su povezani: posebno poglavlje u nastavku.

Širina gustoće spektra snage

- Za niskopropusni slučajni proces jedna mjera širine oko $\omega = 0$ je drugi moment spektra snage, tj. varijanca.
- Efektivna širina pojasa (*eng. RMS bandwidth*) NP procesa definirana je kao normirana varijanca:

$$W_{RMS}{}^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2\, S_{XX}(\omega)\,d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega)\,d\omega}.$$

Širina gustoće spektra snage

- Za pojasnopropusni slučajni proces efektivna širina se mjeri oko središta pojasa ω_0:

$$\omega_0 = \frac{\int_0^{\infty} \omega\, S_{XX}(\omega)\,d\omega}{\int_0^{\infty} S_{XX}(\omega)\,d\omega}, \qquad W_{RMS}{}^2 = \frac{4\int_0^{\infty} (\omega-\omega_0)^2\, S_{XX}(\omega)\,d\omega}{\int_0^{\infty} S_{XX}(\omega)\,d\omega}.$$

Autokorelacija - spektar snage

$$S_{XX}(\omega) = \lim_{T\to\infty}\frac{E[\,X_T^*(\omega)\cdot X_T(\omega)]}{2T}$$

$$= \lim_{T\to\infty} E[\,\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t_1)\,e^{j\omega t_1}dt_1 \cdot \int_{-T}^{T} X(t_2)\,e^{-j\omega t_2}dt_2\,]$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} \underbrace{E[\,X(t_1)\,X(t_2)]}_{R_{XX}(t_1,t_2)}\,e^{-j\omega(t_2-t_1)}dt_2 dt_1$$

- $R_{XX}(t_1, t_2)$ – autokorelacijska funkcija procesa $X(t)$.

Autokorelacija - spektar snage

- Uz supstituciju $t = t_1$ i $\tau = t_2 - t_1$ izlazi:

$$S_{XX}(\omega) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T-t}^{T-t}\int_{-T}^{T} R_{XX}(t, t+\tau)\,dt\; e^{-j\omega\tau}d\tau$$

- Provedemo limes za vanjski integral:

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left\{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} R_{XX}(t,t+\tau)\,dt\right\}} e^{-j\omega\tau}d\tau$$

vremenska srednja vrijednost autokorelacijske funkcije procesa $X(t)$.

Autokorelacija - spektar snage

$$S_{XX}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} A[\,R_{XX}(t,t+\tau)]e^{-j\omega\tau}d\tau$$

- $S_{xx}(\omega)$ i $A[R_{xx}(t, t+\tau)]$ sačinjavaju Fourierov transformacijski par:
  $S_{XX}(\omega) \quad$ <–o $\quad A[R_{XX}(t, t+\tau)]$.
- Za $X(t)$ stacionaran u širem smislu vrijedi:
  $A[R_{XX}(t, t+\tau)] = R_{XX}(\tau)$.
- => AKF nije funkcija vremena, već samo pomaka τ.

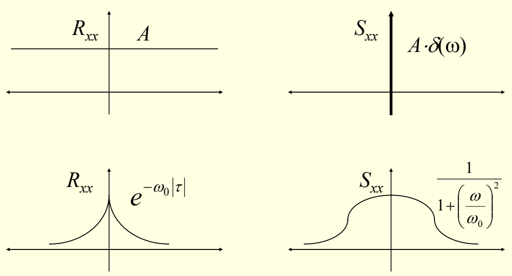
Wiener-Khinchinove relacije

$$S_{XX}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$R_{XX}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega$$

- Veze autokorelacijske funkcije i spektra snage stacionarnog slučajnog procesa.

Wiener-Khinchinove relacije



Kroskorelacija – spektralna gustoća međusnage

- Neka je proces $W(t) = X(t) + Y(t)$.
- Autokorelacija $R_{WW}(t, t+\tau) = E[\mathbf{W}(t)\ \mathbf{W}(t+\tau)] =$
  $E\{[\mathbf{X}(t)+\mathbf{Y}(t)]\cdot[\mathbf{X}(t+\tau)+\mathbf{Y}(t+\tau)]\} =$
  $R_{XX}(t, t+\tau) + R_{YY}(t, t+\tau) + R_{XY}(t, t+\tau) + R_{YX}(t, t+\tau)$.
- Napravimo vremensku srednju vrijednost $A[\cdot]$ i uradimo Fourierovu transformaciju:
- $S_{WW}(\omega) = S_{XX}(\omega) + S_{YY}(\omega) + S_{XY}(\omega) + S_{YX}(\omega)$.
- Dva nova člana $S_{XY}(\omega)$ i $S_{YX}(\omega)$ su **spektri međusnage** (*engl.* cross-spectra).

Kroskorelacija – spektralna gustoća međusnage

- Mogu se dobiti iz Fourierovog spektra konačnog segmenta jedne realizacije:
  $x_T(t)$ o–> $X_T(\omega)$,
  $y_T(t)$ o–> $Y_T(\omega)$.
- Međusnaga dva signala:

$$P_{XY}(T)=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x_T(t)y_T(t)\,dt$$

- Parsevalov teorem daje:

$$P_{XY}(T)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{X_T^*(\omega)Y_T(\omega)}{2T}d\omega$$

Kroskorelacija – spektralna gustoća međusnage

- Srednja vrijednost preko svih realizacija:

$$\overline{P}_{XY}(T)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{E\left[X_T^*(\omega)Y_T(\omega)\right]}{2T}d\omega$$

- Za $T\to\infty$:

$$\overline{P}_{XY}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{\lim_{T\to\infty}\frac{E\left[X_T^*(\omega)Y_T(\omega)\right]}{2T}}_{S_{XY}(\omega)}d\omega$$

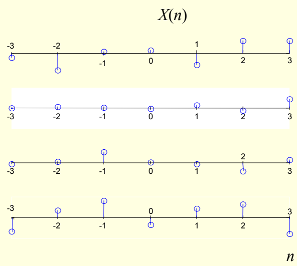
$$\overline{P}_{XY}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_{XY}(\omega)d\omega$$

- Analogno za P_{YX}.

Svojstva spektra međusnage

- $S_{XY}(\omega) = S_{YX}(-\omega) = S_{YX}^*(\omega)$,
- $\mathrm{Re}[S_{XY}(\omega)]$ i $\mathrm{Re}[S_{YX}(\omega)]$ – parne funkcije,
- $\mathrm{Im}[S_{XY}(\omega)]$ i $\mathrm{Im}[S_{YX}(\omega)]$ – neparne funkcije,
- $S_{XY}(\omega) = 0$ i $S_{YX}(\omega) = 0$ ako su $X(t)$ i $Y(t)$ ortogonalni.
- Nekorelirani $X(t)$ i $Y(t)$ s konstantnom srednjom vrijednosti => $S_{XY}(\omega) = S_{YX}(\omega) = 2\pi \underline{XY}\, \delta(\omega)$.
- $A[R_{XY}(t, t+\tau)]$ o–> $S_{XY}(\omega)$ i $A[R_{YX}(t, t+\tau)]$ o–> $S_{YX}(\omega)$ tj. srednja kroskorelacijska funkcija i spektar međusnage čine Fourierov transformacijski par,
- za zajednički stacionarne procese vrijedi: $R_{XY}(\tau)$ o–> $S_{XY}(\omega)$ i $R_{YX}(\tau)$ o–> $S_{YX}(\omega)$.

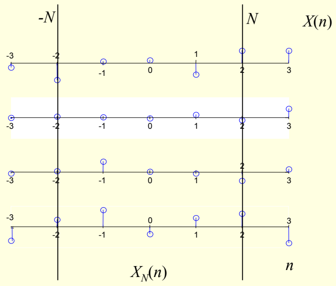
Vremenski diskretan slučajni proces



- VDSP: $X(n)$, $n \in Z$.
- Očekivana vrijednost: $E[X(n)]$.
- AKF: $R_{XX}(n, n+k) = E[X(n)X(n+k)]$.
- Vremenska srednja vrijednost:

$$A[\cdot] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^{N} \cdot$$

Vremenski diskretan slučajni proces



- $X_N(n)$ – konačan segment $[-N, N]$ slučajnog procesa.

Gustoća spektra snage vremenski diskretnih slučajnih procesa

$$S_{XX}(e^{j\omega}) = \lim_{N\to\infty} \frac{E[X_N^* X_N]}{2N+1}$$

$$= \lim_{N\to\infty} E\left\{ \frac{1}{2N+1} \sum_{n_1=-N}^{N} X(n_1) e^{j\omega n_1} \cdot \sum_{n_2=-N}^{N} X(n_2) e^{-j\omega n_2} \right\}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n_1=-N}^{N} \sum_{n_2=-N}^{N} \underbrace{E[X(n_1)X(n_2)]}_{R_{XX}(n_1, n_2)} \cdot e^{j\omega(n_1-n_2)}$$

- $R_{XX}(n_1, n_2)$ je autokorelacija diskretnog procesa $X(n)$.
- Supstituiramo $n = n_1$ i $k = n_2 - n_1$, pa slijedi...

Gustoća spektra snage vremenski diskretnih slučajnih procesa

$$S_{XX}(e^{j\omega}) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-N-n}^{N-n} \sum_{-N}^{N} R_{XX}(n, n+k) \cdot e^{-j\omega k}$$

- Za $N \to \infty$

$$S_{XX}(e^{j\omega}) = \sum_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^{N} R_{XX}(n, n+k)}_{} \cdot e^{-j\omega k}$$

vremenska srednja vrijednost AKF procesa $X(n)$

$$S_{XX}(e^{j\omega}) = \sum_{-\infty}^{\infty} A[R_{XX}(n, n+k)] \cdot e^{-j\omega k}$$

- Veza $S_{XX}(e^{j\omega})$ i $A[R_{XX}(n, n+k)]$: DTFT.

Gustoća spektra snage vremenski diskretnih slučajnih procesa

- Za stacionarne procese:

$$S_{XX}(e^{j\omega}) = \sum_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(k) \cdot e^{-j\omega k}$$

$$R_{XX}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{XX}(e^{j\omega}) e^{j\omega k}\, d\omega$$

- Wiener – Khinchinove relacije za vremenski diskretne slučajne procese.
- Srednja snaga:

$$P_{XX} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-\infty}^{\infty} E[X^2(n)] \qquad P_{XX} = A\{E[X^2(n)]\}$$

Gustoća spektra snage vremenski diskretnih slučajnih procesa

- Srednja snaga P_{XX} integriranjem gustoće spektra:

$$P_{XX} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{XX}\left(e^{j\omega}\right) d\omega$$

$$S_{XX}\left(e^{j\omega}\right) = \lim_{N \to \infty} \frac{E\left[\left|X_N\left(e^{j\omega}\right)\right|^2\right]}{2N+1}$$

Slučajni proces u linearnom sustavu

Prof. dr. sc. Hrvoje Babić
Prof. dr. sc. Damir Seršić
http://ts.zesoi.fer.hr

Odziv linearnog sustava

- Opći linearni sustav zadajemo kao:

$$y(t) = \mathbf{H}[x(t)],$$

- gdje je H linearni operator koji predstavlja djelovanje sustava na $x(t)$.
- Za svaki signal $x(t)$ po definiciji vrijedi:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\xi) \cdot \delta(t-\xi)\, d\xi.$$

Odziv linearnog sustava

- Supstitucijom slijedi:

$$y(t) = \mathbf{H}[x(t)] = \mathbf{H}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\xi) \cdot \delta(t-\xi)\, d\xi\right],$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\xi) \cdot \mathbf{H}[\delta(t-\xi)]\, d\xi.$$

- Definiramo novu funkciju $h(t, \xi)$ – impulsni odziv linearnog sustava:

$$\mathbf{H}[\delta(t-\xi)] = h(t, \xi).$$

Odziv vremenski stalnog linearnog sustava

- Konačno, za odziv linearnog sustava dobivamo:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\xi) \cdot h(t, \xi)\, d\xi.$$

- Ako je sustav neovisan (invarijantan) o vremenu:

$$h(t, \xi) = h(t-\xi),$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\xi) \cdot h(t-\xi)\, d\xi. \rightarrow \text{konvolucijski integral}$$

- Kraće označeno: $y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$.

Odziv linearnog sustava u frekvencijskoj domeni

- Primijenimo *Fourierovu* transformaciju na $y(t)$:

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\xi) \cdot h(t-\xi)\, d\xi\right] \cdot e^{-j\omega t} dt,$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\xi)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\xi) e^{-j\omega(t-\xi)}\, dt\right] \cdot e^{-j\omega\xi} d\xi,$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\xi) H(\omega) \cdot e^{-j\omega\xi} d\xi \quad = H(\omega) \cdot X(\omega).$$

- $H(\omega)$ nazivamo prijenosnom funkcijom sustava.

Kauzalnost i stabilnost sustava

- Linearan vremenski stalan (LVS) sustav je kauzalan ako se ne odaziva prije nego što je pristigla pobuda.
- Matematički izražen uvjet kauzalnosti glasi:
- $y(t) = 0$ za $t < t_0$ ako je $x(t) = 0$ za $t < t_0$,
- Za LVS sustav slijedi: $h(t) = 0$ za $t < 0$.
- Sustav je stabilan ako je odziv na bilo koju ograničenu pobudu ograničen: $|x(t)| < M \rightarrow |y(t)| < M \cdot I$ (M i I su konstante).
- Za LVS sustav slijedi: $$I = \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, dt < \infty.$$

Slučajni proces u linearnom sustavu

- Promatramo odziv stabilnog, linearnog i vremenski stalnog sustava na jednu realizaciju $x(t)$ slučajnog procesa $X(t)$.
- I kada je $x(t)$ slučajan signal, također vrijedi:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\xi) \cdot h(t-\xi)\, d\xi,$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi) \cdot x(t-\xi)\, d\xi.$$

Slučajni proces u linearnom sustavu

- Djelovanje linearnog sustava na jednu realizaciju $x(t)$ slučajnog procesa $X(t)$ rezultira signalom $y(t)$ kojeg možemo smatrati realizacijom nekog novog slučajnog procesa $Y(t)$.
- Definiramo slučajni proces:

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi) \cdot X(t-\xi)\, d\xi$$

- kao novi slučajni proces koji nastaje djelovanjem linearnog sustava H na sve realizacije ulaznog procesa $X(t)$.

Srednja vrijednost odziva

- Ako je ulazni slučajni proces $X(t)$ stacionaran u širem smislu vrijedi:

$$E[Y(t)] = E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi) \cdot X(t-\xi)\, d\xi\right].$$

- Mi ćemo pretpostaviti da operator očekivanja E i integral mogu zamijeniti mjesta kad god to zatrebamo (dokaz i uvjeti *Cooper & McGillem* 1986.).

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi) \cdot E[X(t-\xi)]\, d\xi.$$

Srednja vrijednost odziva

$$E[Y(t)] = \overline{X} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi)\, d\xi \quad = \overline{Y}. \quad \rightarrow \text{konstanta.}$$

- Srednja vrijednost $Y(t)$ jednaka je srednjoj vrijednosti $X(t)$ pomnoženoj s površinom ispod impulsnog odziva sustava, ako je $X(t)$ stacionaran u širem smislu.

Srednja kvadratna vrijednost odziva

$$E[Y^2(t)] = E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi_1) \cdot X(t-\xi_1)\, d\xi_1 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi_2) \cdot X(t-\xi_2)\, d\xi_2\right],$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} E[X(t-\xi_1)\, X(t-\xi_2)]\, h(\xi_1)\, h(\xi_2)\, d\xi_1 d\xi_2$$

- Ako je ulazni slučajni proces $X(t)$ stacionaran u širem smislu vrijedi:

$$E[X(t-\xi_1)\, X(t-\xi_2)] = R_{XX}(\xi_1 - \xi_2),$$

- odnosno autokorelacija nije funkcija vremena.

Srednja kvadratna vrijednost odziva

- Stoga niti naš rezultat nije ovisan o vremenu:

$$E\left[Y^2(t)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(\xi_1-\xi_2)\,h(\xi_1)\,h(\xi_2)\,d\xi_1 d\xi_2 \quad = \overline{Y^2}.$$

- Izraz u većini slučajeva nije jednostavno izračunati.
- Mi ćemo riješiti jednostavan primjer.

Srednja kvadratna vrijednost odziva - primjer

- Tražimo srednju kvadratnu vrijednost izlaza, ako je na ulazu u sustav bijeli šum:

$$R_{XX}(\xi_1-\xi_2)=\frac{N_0}{2}\delta(\xi_1-\xi_2),$$

- gdje je N_0 pozitivna realna konstanta.
- Slijedi:

$$\overline{Y^2} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N_0}{2}\delta(\xi_1-\xi_2)\,h(\xi_1)\,h(\xi_2)\,d\xi_1 d\xi_2.$$

Srednja kvadratna vrijednost odziva - primjer

- Integriramo najprije po ξ_1:

$$\overline{Y^2} = \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi_2)\cdot h(\xi_2)\,d\xi_2,$$

- jer integral $\delta(\xi_1-\xi_2)\,h(\xi_1)\,d\xi_1$ iznosi $h(\xi_2)$.
- Konačno:

$$\overline{Y^2} = \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} h^2(\xi)d\xi.$$

- U našem slučaju, izlazna snaga proporcionalna je površini ispod kvadrata impulsnog odziva.

Autokorelacijska funkcija odziva

- Neka je $X(t)$ stacionaran u širem smislu.

$$R_{YY}(t,t+\tau)=E\left[Y(t)Y(t+\tau)\right],$$

$$= E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi_1)\cdot X(t-\xi_1)\,d\xi_1 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi_2)\cdot X(t+\tau-\xi_2)\,d\xi_2\right],$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} E\left[X(t-\xi_1)\,X(t+\tau-\xi_2)\right]h(\xi_1)h(\xi_2)\,d\xi_1 d\xi_2,$$

- Izraz pod operatorom očekivanja je $R_{XX}(t, t+\tau+\xi_1-\xi_2)$, a kako je naš proces stacionaran u širem smislu slijedi:

Autokorelacijska funkcija odziva

$$R_{YY}(\tau)= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(\tau+\xi_1-\xi_2)\,h(\xi_1)h(\xi_2)\,d\xi_1 d\xi_2.$$

- Pretpostavka: $X(t)$ stacionaran u širem smislu.
- Slijedi da je $Y(t)$ isto stacionaran u širem smislu,
- a izraz za R_{YY} je dvostruka konvolucija ulazne autokorelacijske funkcije s impulsnim odzivom sustava:

$$R_{YY}(\tau)=R_{XX}(\tau)*h(-\tau)*h(\tau).$$

- $h(-\tau)*h(\tau)$ se naziva i autokorelacijom impulsnog odziva.

Spektar snage odziva

- Polazimo od poznatog izraza:

$$S_{YY}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} R_{YY}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$S_{YY}(\tau)= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(\tau+\xi_1-\xi_2)\,h(\xi_1)h(\xi_2)\,d\xi_1 d\xi_2 e^{-j\omega\tau}d\tau.$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi_1)\int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi_2)\int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(\tau+\xi_1-\xi_2)\,e^{-j\omega\tau}d\tau\,d\xi_2 d\xi_1.$$

Spektar snage odziva

- Supstituiramo:

$$\xi = \tau + \xi_1 - \xi_2, \quad d\xi = d\tau.$$

- Eksponencijalni član razdijelimo u 3 dijela:

$$\tau = \xi - \xi_1 + \xi_2, \quad e^{-j\omega\tau} = e^{-j\omega\xi} \cdot e^{+j\omega\xi_1} \cdot e^{-j\omega\xi_2}$$

$$R_{YY}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi_1) e^{+j\omega\xi_1} d\xi_1 \int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi_2)\, e^{-j\omega\xi_2} d\xi_2 \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(\xi)\, e^{-j\omega\xi} d\xi.$$

- Prvi član je $H^*(\omega)$, drugi je $H(\omega)$, a treći $S_{xx}(\omega)$.

Spektar snage odziva

- Konačno:

$$S_{YY}(\omega) = H^*(\omega) \cdot H(\omega) \cdot S_{XX}(\omega),$$

$$S_{YY}(\omega) = |H(\omega)|^2 \cdot S_{XX}(\omega).$$

- Dobiveni izraz povezuje spektre snage ulaznog i izlaznog slučajnog procesa.
- Vrlo važan međurezultat $|H(\omega)|^2$ nazivamo prijenosnom funkcijom snage.

Kroskorelacijska funkcija ulaza i izlaza

- Kroskorelacijska funkcija $X(t)$ i $Y(t)$ je:

$$R_{XY}(t, t+\tau) = E[X(t) Y(t+\tau)],$$

$$= E\left[X(t) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi) \cdot X(t+\tau-\xi)\, d\xi \right],$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} E[X(t)\, X(t+\tau-\xi)]\, h(\xi)\, d\xi,$$

- Izraz pod operatorom očekivanja je $R_{XX}(t, t+\tau-\xi)$, a ako je proces $X(t)$ stacionaran u širem smislu slijedi:

Kroskorelacijska funkcija ulaza i izlaza

$$R_{XY}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(\tau - \xi)\, h(\xi)\, d\xi.$$

- Izraz za R_{XY} je konvolucija ulazne autokorelacijske funkcije s impulsnim odzivom sustava. $R_{XY}(\tau) = R_{XX}(\tau) * h(\tau).$
- Slično možemo pokazati:

$$R_{YX}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(\tau - \xi)\, h(-\xi)\, d\xi,$$

$$R_{YX}(\tau) = R_{XX}(\tau) * h(-\tau).$$

Kroskorelacijska funkcija ulaza i izlaza

- Izrazi za R_{XY} i R_{YX} ne ovise o vremenu $\rightarrow$ $X(t)$ i $Y(t)$ su zajednički stacionarni u širem smislu (već smo prije pokazali da je R_{YY} neovisna o vremenu).
- Uvrstimo li rezultate u prethodni izraz za R_{YY} imamo:

$$R_{YY}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XY}(\tau + \xi)\, h(\xi)\, d\xi,$$

$$R_{YY}(\tau) = R_{XY}(\tau) * h(-\tau).$$

Kroskorelacijska funkcija ulaza i izlaza

- Slična supstitucija daje vezu:

$$R_{YY}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{YX}(\tau - \xi)\, h(\xi)\, d\xi,$$

$$R_{YY}(\tau) = R_{YX}(\tau) * h(\tau).$$

Kroskorelacijska funkcija ulaza i izlaza - primjer

- Nastavljamo prethodni primjer računajući R_{XY} i R_{YX}.

$$R_{XY}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{N_0}{2}\,\delta(\tau-\xi)\,h(\xi)\,d\xi=\frac{N_0}{2}\,h(\tau).$$

$$R_{YX}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{N_0}{2}\,\delta(\tau-\xi)\,h(-\xi)\,d\xi=\frac{N_0}{2}\,h(-\tau)=R_{XY}(-\tau).$$

- Potvrdili smo već poznatu vezu R_{XY} i R_{YX}.

Spektri međusnage

- Vrlo je lako pokazati da:

$$S_{XY}(\omega)=H(\omega)\cdot S_{XX}(\omega),$$

$$S_{YX}(\omega)=H(-\omega)\cdot S_{XX}(\omega),$$

Odziv vremenski stalnog diskretnog linearnog sustava

- Izlaz diskretnog vremenski stalnog linearnog sustava dan je konvolucijskom sumacijom:

$$x_r(n)\;\longrightarrow\;\boxed{h(n)}\;\longrightarrow\;y_r(n)\qquad y_r(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(n-m)\,x_r(m),$$

- što je bio izraz za jednu realizaciju slučajnog procesa x_r, a za sve realizacije možemo napisati:

$$X(n)\;\longrightarrow\;\boxed{h(n)}\;\longrightarrow\;Y(n)\qquad Y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(n-m)\,X(m).$$

Srednja (očekivana) vrijednost izlaza linearnog sustava

- U slučajnom procesu to vrijedi za svaku realizaciju, pa tako i za očekivanu vrijednost obje strane konvolucijske sumacije.

$$E[Y(n)]=E\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(n-m)\,X(m)\right]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(n-m)\,\underbrace{E[X(m)]}_{\overline{X}}$$

- Za stacionarne procese $E[X(m)]$ je konstanta, pa slijedi da je i $E[Y(n)]$ konstanta :

$$E[Y(n)]=\overline{Y}=\overline{X}\cdot\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m).$$

Srednja (očekivana) vrijednost izlaza linearnog sustava

- Zanimljiv rezultat imamo i u Z–domeni.
- Kako je Z transformacija impulsnog odziva $h(m)$:

$$H(z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m)\,z^{-m},\qquad \text{slijedi da je}$$

$$H(1)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m),\qquad \text{odnosno}$$

$$E[Y(n)]=\overline{Y}=\overline{X}\cdot H(1).$$

Autokorelacijska sekvencija

- Očekivana vrijednost $E[Y(n_1)\,Y(n_2)]=R_{yy}(n_1,n_2)$,

$$R_{yy}(n_1,n_2)=E\left[\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(n_1-m)\,X(m)\right)\cdot Y(n_2)\right],$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(n_1-m)\,E[X(m)\cdot Y(n_2)],$$

$$R_{yy}(n_1,n_2)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(n_1-m)\,R_{xy}(m,n_2)$$

- Za stacionarni proces, uz supstituciju $k=n_2-n_1$ i $l=n_2-m$ slijedi:

$$R_{yy}(k)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}h(l-k)\,R_{xy}(l)$$

Autokorelacijska sekvencija

- Isto tako možemo dobiti:

$$E[Y(n_1)\cdot X(n_2)] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n_1-m)\, E[X(m)\cdot X(n_2)],$$

$$R_{yx}(n_1,n_2) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n_1-m)\, R_{xx}(m,n_2).$$

- Za stacionarni proces, uz supstituciju $k = n_2 - n_1$ i $l = n_2 - m$ slijedi:

$$R_{yx}(k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l-k)\, R_{xx}(l),$$

$$R_{yx} = h * R_{xx}.$$

Autokorelacijska sekvencija

- Kako je $R_{xy}(k) = R_{yx}(-k)$ i $R_{xx}(k) = R_{xx}(-k)$, vrijedi:

$$R_{xy}(k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(-l+k)\, R_{xx}(l), \quad R_{xy}(k) = h(-k) * R_{xx}(k).$$

- Slično imamo:

$$R_{yy} = h * R_{xy},$$

$$R_{yy}(k) = \underbrace{h(k) * h(-k)} * R_{xx}(k).$$

Često se naziva autokorelacija impulsnog odziva r_{hh}.

$$R_{yy}(k) = r_{hh}(k) * R_{xx}(k).$$

Autokorelacijska sekvencija u frekvencijskoj domeni (F_{vd})

$$S_{YX}(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})\, S_{XX}(e^{j\omega}),$$

$$S_{XY}(e^{j\omega}) = S_{YX}(e^{-j\omega}),$$

$$S_{XY}(e^{j\omega}) = H(e^{-j\omega})\, S_{XX}(e^{j\omega}),$$

$$S_{YY}(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})\, H(e^{-j\omega})\, S_{XX}(e^{j\omega}),$$

$$S_{YY}(e^{j\omega}) = \underbrace{\left|H(e^{j\omega})\right|^2}\, S_{XX}(e^{j\omega}).$$

- Transfer funkcija snage $R_{hh}(e^{j\omega})$.

Autokorelacijska sekvencija u Z domeni

$$S_{YX}(z) = H(z)\, S_{XX}(z),$$

$$S_{XY}(z) = S_{YX}(z^{-1}),$$

$$S_{XY}(z) = H(z^{-1})\, S_{XX}(z),$$

$$S_{YY}(z) = \underbrace{H(z)\, H(z^{-1})}\, S_{XX}(z).$$

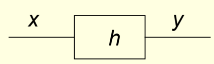
- Transfer funkcija snage $R_{hh}(z)$, ili transfer funkcija II reda.

Optimalni linearni sustavi

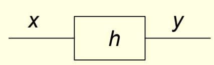
Prof. dr. sc. Hrvoje Babić
Prof. dr. sc. Damir Seršić
http://ts.zesoi.fer.hr

Analiza i sinteza linearnih sustava

- Analiza: $x, h \to y$



- Sinteza: $x, y \to h$



- Analiza linearnih sustava je uvijek moguća, iako ne mora biti jednostavna.
- Sinteza ne mora dati ostvarivo rješenje: na realnom sustavu uvijek postoje ograničenja.

Sinteza linearnih sustava

- Realni sustavi – kauzalni, konačnog reda, s raspodijeljenim parametrima, ...
- Često znamo željeni odnos x i y, ali sustav h ne mora biti ostvariv.
- Zadatak sinteze: odrediti sustav koji zadovoljava ograničenja realnog sustava i aproksimira željeni odnos x i y.
- Za linearne sustave određivanje sustava je pronalaženje prijenosne funkcije ili impulsnog odziva.

Optimalni sustavi

- Latinski *optimus* = najbolji.
- Za sintezu optimalnog ili najboljeg sustava moramo poznavati:
  - ulazne specifikacije (*eng. input specification*),
  - ograničenja sustava (*eng. system constraints*),
  - kriterij optimalnosti (*eng. criterion of optimality*).

Ulazne specifikacije

- Ulaz može biti:
  - deterministički signal;
  - stohastički signal (realizacija slučajnog procesa):
    - zadan funkcijom gustoće vjerojatnosti ili razdiobom; odnosno opisan mjerama kao što su srednja vrijednost, autokorelacijska funkcija, spektar snage, …
  - mješavina determinističkog i stohastičkog signala.

Ograničenja sustava

- Sustav može biti:
  - sa zbijenim ili raspodijeljenim parametrima,
  - linearan ili nelinearan,
  - kauzalan ili nekauzalan,
  - ostvariv ili neostvariv,
  - vremenski stalan ili promjenjiv,
  - s različitim ograničenjima realizacije ili bez njih.

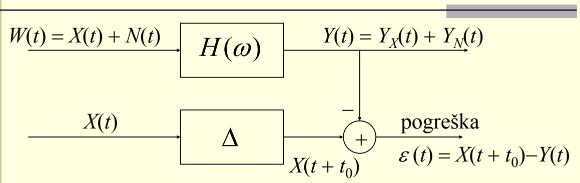
Kriterij optimalnosti

- Kriterij optimalnosti
  - je smislena mjera dobrote sustava.
  - Izražava se jednadžbama koje se dadu riješiti, analitički ili numerički.
  - Najčešće je to minimalizacija odstupanja realnog od željenog idealnog sustava.
  - Može biti i maksimalizacija udjela korisnih komponenti signala prema nekorisnim.

Wienerov filtar: kriterij

- Sustav koji najbolje izdvaja slučajni signal iz aditivnog šuma, uz eventualni vremenski pomak je Wienerov filtar.
- Sustav se projektira tako da njegov izlaz bude najbolja procjena (estimacija) prošle, sadašnje ili buduće trenutne vrijednosti realizacije slučajnog procesa.
- "Najbolje" ovdje znači "uz najmanju integralnu kvadratnu pogrešku" procjene.
- Pretpostavke:
  - korisnom slučajnom procesu $X(t)$ pribrojen je šum $N(t)$: $W(t) = X(t) + N(t)$.
  - $X(t)$ i $N(t)$ zajednički stacionarni u širem smislu, šum $N(t)$ je sa srednjom vrijednošću nula.

Model Wienerovog filtra

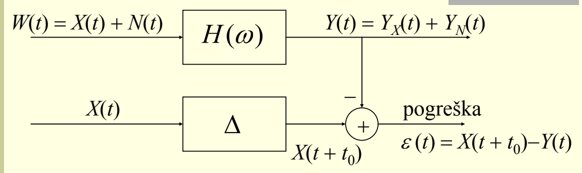


- Konceptualni model pogreške estimacije

$$\Delta(\omega) = e^{j\omega t_0} \quad \Rightarrow |\Delta(\omega)| = 1; \quad \arg \Delta(\omega) = \omega t_0$$

vremenski pomak $-t_0$

Model Wienerovog filtra



- za $t_0 > 0$, $t_0 = 0$, $t_0 < 0 \to$ ocjenjuje se buduća, sadašnja ili prošla vrijednost signala.
- Mjera pogreške: očekivanje kvadratne vrijednosti $\to$ predstavlja srednju snagu procesa pogreške $\varepsilon(t)$.

Wienerov filtar, polazište

Aditivni model šuma:

$$W(t) = X(t) + N(t).$$

Pogreška:

$$\varepsilon(t) = X(t + t_0) - Y(t).$$

Želimo najmanju očekivanu kvadratnu pogrešku:

$$P_\varepsilon = E\left[\{X(t + t_0) - Y(t)\}^2\right]$$

Pritom ne brinemo da li će sustav $H(\omega)$ biti moguće realizirati.

Wienerov filtar

$$P_\varepsilon = E\left[\{X(t + t_0) - Y(t)\}^2\right] =$$
$$E\left[\{X(t + t_0)^2 - 2Y(t)X(t + t_0) + Y(t)^2\}\right]$$

- $X(t)$ i $N(t)$ su zajednički stacionarni u širem smislu, pa imamo:

$$P_\varepsilon = R_{XX}(0) - 2R_{YX}(t_0) + R_{YY}(0),$$
$$P_\varepsilon = P_X - 2R_{YX}(t_0) + P_Y.$$

- Tražimo $H(\omega)$, stoga nam je zgodno napisati pribrojnike preko spektara snage.

Izraženo preko spektara snage

$$P_X = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega)\, d\omega,$$

$$P_Y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{WW}(\omega)|H(\omega)|^2\, d\omega.$$

- Za kroskorelacijsku funkciju imamo:

$$R_{YX}(t_0) = E[Y(t)X(t + t_0)] = E\left[X(t + t_0)\int_{-\infty}^{\infty} h(\xi)W(t - \xi)\, d\xi\right]$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi)E[X(t + t_0)W(t - \xi)]\, d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} R_{WX}(t_0 + \xi)h(\xi)\, d\xi$$

Izraženo preko spektara snage

$$R_{YX}(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{WX}(t_0 + \xi)h(\xi)\, d\xi.$$

- Preko spektra međusnage:

$$R_{YX}(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{WX}(\omega)e^{j\omega(t_0 + \xi)}\, d\omega \quad h(\xi)\, d\xi,$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{WX}(\omega)\, e^{j\omega t_0}\int_{-\infty}^{\infty} h(\xi)\, e^{j\omega\xi} d\xi\, d\omega,$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{WX}(\omega)H(-\omega)\, e^{j\omega t_0}\, d\omega.$$

Konačno, izraz glasi:

$$P_\varepsilon = P_X - 2R_{YX}(t_0) + P_Y,$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{S_{XX}(\omega) - 2S_{WX}(\omega)H(-\omega)e^{j\omega t_0} + S_{WW}(\omega)|H(\omega)|^2\right\}d\omega$$

- Dakle, tražimo takvu $H(\omega)$ da je gornji izraz minimalan.
- $H(\omega)$ i $S_{WX}(\omega)$ ćemo zapisati u polarnom obliku:

$$H(\omega) = |H(\omega)|e^{\arg H(\omega)}, \qquad S_{WX}(\omega) = |S_{WX}(\omega)|e^{\arg S_{WX}(\omega)}.$$

Optimalna fazna karakteristika

$$P_\varepsilon = P_X + P_Y - 2R_{YX}(t_0),$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{S_{XX}(\omega) + S_{WW}(\omega)|H(\omega)|^2\right\}d\omega$$

$$- \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2|S_{WX}(\omega)||H(\omega)|e^{j(\arg S_{WX}(\omega) - \arg H(\omega) + \omega t_0)}\, d\omega$$

- Za minimalan rezultat tražimo fazu sustava $\arg H(\omega)$ takvu da je drugi pribrojnik maksimalan.
- Maksimum se postiže za:

$$\arg H(\omega) = \arg S_{WX}(\omega) + \omega t_0.$$

Optimalna amplitudna karakteristika

- Za odabranu fazu imamo:

$$P_\varepsilon = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{S_{XX}(\omega) - 2|S_{WX}(\omega)||H(\omega)| + S_{WW}(\omega)|H(\omega)|^2\right\}d\omega$$

- Kako bi izolirali traženi $|H(\omega)|$, napišimo podintegralni izraz kao:

$$\left\{S_{XX}(\omega) - \frac{|S_{WX}(\omega)|^2}{S_{WW}(\omega)} + S_{WW}(\omega)\left[\frac{|S_{WX}(\omega)|}{S_{WW}(\omega)} - |H(\omega)|\right]^2\right\}$$

- Minimum se postiže za: $|H(\omega)| = \dfrac{|S_{WX}(\omega)|}{S_{WW}(\omega)}$

Wienerov filtar

- Optimalni filtar je, dakle:

$$H_{opt}(\omega) = \frac{|S_{WX}(\omega)|}{S_{WW}(\omega)} e^{j(\arg S_{WX}(\omega) + \omega t_0)},$$

- Odnosno:

$$H_{opt}(\omega) = \frac{S_{WX}(\omega)}{S_{WW}(\omega)} e^{j\omega t_0}.$$

Wienerov filtar, nekorelirani signal i šum

- Ukoliko signal i šum nisu korelirani, vrijedi:
- $S_{WW}(\omega) = S_{XX}(\omega) + S_{NN}(\omega)$,
- $S_{WX}(\omega) = S_{XX}(\omega)$
- Optimalna prijenosna funkcija koja najbolje izdvaja signal iz šuma je tada:

$$H_{opt}(\omega) = \frac{S_{XX}(\omega)}{S_{XX}(\omega) + S_{NN}(\omega)} e^{j\omega t_0}.$$

Ostvarivost Wienerovog filtra

- Općenito, impulsni odziv filtra je nekauzalan:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{S_{XX}(\omega)}{S_{XX}(\omega) + S_{NN}(\omega)} e^{j\omega(t+t_0)} d\omega.$$

- Nekauzalni odziv je neostvariv.
- Možemo ga aproksimirati ako stavimo dovoljno veliko kašnjenje t_0: nekauzalni dio odziva postaje zanemariv.
- Postoje i metode nalaženja ostvarivih Wienerovih filtara.

Pogreška Wienerovog filtra

- Srednja vrijednost (očekivanje) kvadrata greške estimacije je određena ostatkom:

$$E\left[\varepsilon^2(t)\right]_{\min} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{S_{XX}(\omega)S_{NN}(\omega)}{S_{XX}(\omega)+S_{NN}(\omega)}\,d\omega.$$

- To je najmanja kvadratna pogreška estimacije među svim linearnim sustavima.

Optimalna amplitudna karakteristika

- Promotrit ćemo optimalnu amplitudnu karakteristiku:

$$A(\omega) = \frac{S_{XX}(\omega)}{S_{XX}(\omega)+S_{NN}(\omega)},$$

- za dva posebna slučaja:
  - šum mnogo veći od korisnog signala,
  - korisni signal mnogo veći od šuma.

Optimalna amplitudna karakteristika

a) $S_{NN}(\omega) >> S_{XX}(\omega)$

- Za bijeli šum vrijedi:

$$S_{NN}(\omega) = S_{NN}(0),$$

$$A(\omega) = \frac{S_{XX}(\omega)}{S_{XX}(\omega)+S_{NN}(0)} \approx \frac{S_{XX}(\omega)}{S_{NN}(0)}.$$

- Ako je šum velik, optimalni filtar mora imati pojas propuštanja jednak pojasu spektra snage signala.

Optimalna amplitudna karakteristika

- Filtar mora gušiti što više šuma, ali tako da izobličenje korisnog signala bude malo.
- Pogreška estimacije iznosi:

$$E_{\min}\left[\varepsilon^2(t)\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{S_{XX}(\omega)S_{NN}(\omega)}{S_{XX}(\omega)+S_{NN}(\omega)}\,d\omega \approx \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{S_{XX}(\omega)S_{NN}(\omega)}{S_{NN}(\omega)}\,d\omega,$$

$$E_{\min}\left[\varepsilon^2(t)\right] \approx \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega)\,d\omega.$$

Optimalna amplitudna karakteristika

b) $S_{NN}(\omega) << S_{XX}(\omega)$

- Za slabi šum vrijedi:

$$A(\omega) = \frac{S_{XX}(\omega)}{S_{XX}(\omega)+S_{NN}(0)} \approx 1.$$

- Ako je šum slab, optimalno je da filtar ima širok pojas propuštanja.

Prilagođeni filtar

- Upotrebljava se u digitalnim komunikacijama, mjernoj instrumentaciji, detekciji radarskih i sonarskih signala, u nuklearnoj tehnici (određivanje zračenja), ...
- Prilagođeni filtar maksimizira odnos signal-šum za deterministički signal uz prisutnost slučajnog šuma u nekom odabranom trenutku t_0.
- Pretpostavke:
  - determinističkom signalu x(t) pribrojena je realizacija šuma $n(t)$: $w(t) = x(t) + n(t)$.
  - Slučajni proces $N(t)$ je stacionaran u širem smislu.

Model prilagođenog filtra

- Prilagođeni filtar je određen oblikom signala kojeg želimo izdvojiti te svojstvima šuma.

$$\xrightarrow[S_{NN}(\omega)]{x(t)+n(t)} \boxed{H(\omega)} \xrightarrow[S_{NN}(\omega)\cdot|H(\omega)|^2]{x_o(t)+n_o(t)}$$

- Kako ne znamo oblik šuma, već samo njegovu gustoću spektra snage, prelazimo na:

$$\left(\frac{S}{N}\right) \longrightarrow \boxed{H(\omega)} \longrightarrow \left(\frac{S_o}{N_o}\right)$$

omjer signal-šum

Odnos signal-šum

- Želimo da omjer signal-šum na izlazu filtra bude maksimalan.

Def. :

$$\left(\frac{S_o}{N_o}\right) = \frac{|x_o(t_0)|^2}{E\left[N_o^2(t)\right]}$$

snaga determinističkog signala u trenutku t_0

srednja vrijednost snage šuma

Odnos signal-šum

- Deterministički signal na izlazu filtra određen je inverznom Fourierovom transformacijom:

$$x_o(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)H(\omega)e^{j\omega t}\, d\omega.$$

- Srednja vrijednost snage šuma na izlazu filtra određena je sa:

$$E\left[N_o^2(t)\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{NN}(\omega)|H(\omega)|^2\, d\omega.$$

Odnos signal-šum

$$\Rightarrow$$

$$\left(\frac{S_o}{N_o}\right) = \frac{\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)H(\omega)e^{j\omega t_0}\, d\omega\right|^2}{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{NN}(\omega)|H(\omega)|^2\, d\omega}$$

- Tražimo maksimum omjera signal-šum na izlazu filtra.

Maksimum omjera signal-šum

- Iskoristit ćemo Schwartzovu nejednakost:

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)B(\omega)\, d\omega\right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |A(\omega)|^2\, d\omega \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |B(\omega)|^2\, d\omega.$$

- Znak jednakosti vrijedi samo ako je:

$$B(\omega) = \mathrm{c}\cdot A^*(\omega),$$

- gdje je c realna konstanta.

Maksimum omjera signal-šum

- Schwartzovu nejednakost primjenjujemo na izraz u brojniku, pri čemu ćemo odabrati:

$$A(\omega) = H(\omega)\sqrt{S_{NN}(\omega)},$$

$$B(\omega) = \frac{X(\omega)e^{j\omega t_0}}{2\pi\sqrt{S_{NN}(\omega)}}.$$

- Pri tome nas drugi korijen iz gustoće spektra snage ne treba brinuti jer je on uvijek pozitivna veličina.

Maksimum omjera signal-šum

$$\Rightarrow \left|\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)\sqrt{S_{NN}(\omega)}\cdot\frac{X(\omega)e^{j\omega t_0}}{2\pi\sqrt{S_{NN}(\omega)}}d\omega\right|^2 \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|H(\omega)|^2 S_{NN}(\omega)\,d\omega\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|X(\omega)|^2}{S_{NN}(\omega)}d\omega$$

krati nazivnik

Maksimum omjera signal-šum

- Pa je omjer signal-šum na izlazu određen relacijom:

$$\left(\frac{S_o}{N_o}\right)\leq\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|X(\omega)|^2}{S_{NN}(\omega)}d\omega.$$

- Želimo maksimum, tj. da vrijedi jednakost:

$$\left(\frac{S_o}{N_o}\right)_{\max}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|X(\omega)|^2}{S_{NN}(\omega)}d\omega.$$

Maksimum omjera signal-šum

- Kao što je već navedeno, jednakost vrijedi za:

$$B(\omega)=\mathrm{c}\cdot A^*(\omega),$$

- pa slijedi:

$$\frac{X(\omega)e^{j\omega t_0}}{2\pi\sqrt{S_{NN}(\omega)}}=\mathrm{c}\cdot H^*(\omega)\sqrt{S_{NN}(\omega)}.$$

Prilagođeni filtar

- Iz toga slijedi optimalna prijenosna funkcija prilagođenog filtra:

$$H_{opt}^*(\omega)=\frac{X(\omega)e^{j\omega t_0}}{2\pi\cdot\mathrm{c}\cdot S_{NN}(\omega)},$$

- odnosno:

$$H_{opt}(\omega)=\frac{X^*(\omega)e^{-j\omega t_0}}{2\pi\cdot\mathrm{c}\cdot S_{NN}(\omega)}.$$

- Filtar je prilagođen ulaznom signalu.
- Trenutak t_0 kada odnos signal-šum na izlazu filtra postiže maksimum se pojavljuje kao proizvoljno kašnjenje.

Prilagođeni filtar za bijeli šum

- Za bijeli šum vrijedi :

$$S_{NN}(\omega)=konst.$$

$$\Rightarrow\quad H_{opt}(\omega)=\mathrm{k}\cdot X^*(\omega)e^{-j\omega t_0}.$$

- Kod bijelog šuma je $H_{opt}(\omega)$ proporcionalan prigušenom konjugiranom spektru signala.

Prilagođeni filtar za bijeli šum

$$H_{opt}(\omega)=\mathrm{k}\cdot X(-\omega)e^{-j\omega t_0}$$

$$H_{opt}(-\omega)=\mathrm{k}\cdot X(\omega)e^{j\omega t_0}$$

- To znači da će impulsni odziv prilagođenog filtra biti dan sa:

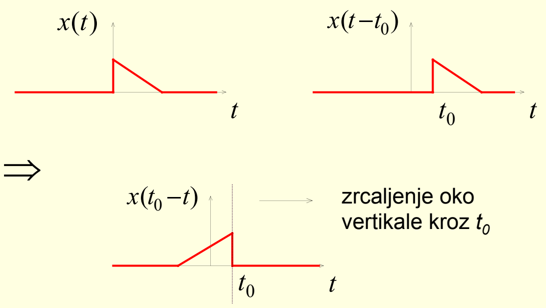
$$h_{opt}(-t)=\mathrm{k}\cdot x(t+t_0),$$

- odnosno:

$$h_{opt}(t)=\mathrm{k}\cdot x(t_0-t).$$

Prilagođeni filtar za bijeli šum

- Primjer:



Odziv prilagođenog filtra

- Odziv linearnog vremenski nepromjenjivog filtra određen je konvolucijskim integralom:

$$y_{opt}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h_{opt}(t-\tau)\, d\tau,$$

$$= \mathrm{k} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, x(t_0-(t-\tau))\, d\tau,$$

$$= \mathrm{k} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, x(t_0-(t-\tau))\, d\tau.$$

Odziv prilagođenog filtra

$$y_{opt}(t) = \mathrm{k} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, x(t_0-t+\tau)\, d\tau$$

- Što za $t=t_0$ iznosi:

$$y_{opt}(t) = \mathrm{k} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)^2\, d\tau,$$

$$y_{opt}(t) = \mathrm{k} \cdot E_X \Rightarrow$$ energija ulaznog signala

Odziv prilagođenog filtra

- Odziv u trenutku $t=t_0$ proporcionalan je energiji ulaznog signala.