

Osnove slučajnih procesa

Prof. dr. sc. Sven Lončarić
Prof. dr. sc. Hrvoje Babić
Prof. dr. sc. Damir Seršić

Literatura

- WEB: <http://ts.zesoi.fer.hr>
- H. Babić, S. Lončarić, D. Seršić: *Slučajni procesi u sustavima*, <http://spus.zesoi.fer.hr>, 2002.
- P. Z. Peebles: *Probability, Random Variables and Random Signal Principles, 3rd ed.*, McGraw-Hill, 1993.
- D.G.Manolakis, V.K.Ingle, S.M.Kogon: *Statistical and Adaptive Signal Processing*, McGraw-Hill, 2000
- M.H. Hayes: *Statistical digital signal processing and modeling*, John Wiley & Sons, 1996.

Koncept slučajnog procesa

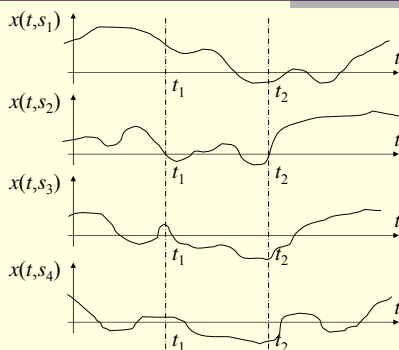
- U brojnim primjenama (kompresija, prijenos, ...) eksploatiraju se statistička svojstva signala i to:
 - jedne pojave (realizacije),
 - skupa srodnih signala.
- Druga varijanta vodi do koncepta slučajnog procesa.
- Engl. *random process* ili *stochastic process*.
- Koncept slučajnog procesa dobiva se iz koncepta slučajne varijable uz dodavanje vremenske dimenzije.

Koncept slučajnog procesa

- Slučajna varijabla je preslikavanje koje svakom ishodu eksperimenta s dodjeljuje broj $x(s)$, a koji se zove realizacija slučajne varijable.
- Slučajni proces je preslikavanje koje svakom ishodu eksperimenta s dodjeljuje funkciju vremena $x(t, s)$ – jednu realizaciju.
- Obitelj svih takvih funkcija $x(t, s)$ zove se slučajni proces i označava se kao $\mathbf{X}(t, s)$ ili kraće $\mathbf{X}(t)$.

Koncept slučajnog procesa

- Za $t = t_1$ $X(t_1, s)$ je slučajna varijabla



Klasifikacije slučajnih procesa

- Diskretni i kontinuirani slučajni procesi
 - slobodna i/ili zavisna varijabla mogu biti iz kontinuiranog ili prebrojivog skupa.
- Deterministički i nedeterministički
 - pojedina realizacija može biti predvidljiva ili nepredvidljiva.
- Stacionarni i nestacionarni
 - ovisno o promjenjivosti statističkih svojstava u vremenu.

Funkcije distribucije slučajnog procesa

- U određenom trenutku t , $\mathbf{X}(t)$ je slučajna varijabla koja ima funkciju distribucije prvog reda definiranu izrazom:

$$F_X(x, t) = P(\mathbf{X}(t) \leq x)$$

- To je funkcija distribucije prvog reda (CDF).

Funkcija distribucije N -tog reda

- Za N slučajnih varijabli $\mathbf{X}_i = \mathbf{X}(t_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$ funkcija distribucije N -tog reda slučajnog procesa $\mathbf{X}(t)$ definirana je izrazom:

$$\begin{aligned} F_X(x_1, \dots, x_N, t_1, \dots, t_N) &= \\ &= P(\mathbf{X}(t_1) \leq x_1, \dots, \mathbf{X}(t_N) \leq x_N) \end{aligned}$$

Funkcije gustoće vjerojatnosti slučajnog procesa

- Funkcija gustoće vjerojatnosti (PDF) prvog reda slučajnog procesa $\mathbf{X}(t)$ definirana je izrazom:

$$f_X(x, t) = \frac{dF_X(x, t)}{dx}$$

- Funkcija gustoće vjerojatnosti N -tog reda:

$$f_X(x_1, \dots, x_N, t_1, \dots, t_N) = \frac{\partial^N F_X(x_1, \dots, x_N, t_1, \dots, t_N)}{\partial x_1 \dots \partial x_N}$$

Definicija stacionarnosti

- Definicija: stohastički proces $\mathbf{X}(t)$ je stacionaran ako za svaki $n \in \mathbf{N}$, za svaki izbor trenutaka t_1, \dots, t_n i za svaki $u \in \mathbf{R}$ slučajne varijable $\mathbf{X}(t_1), \dots, \mathbf{X}(t_n)$ i slučajne varijable $\mathbf{X}(t_1+u), \dots, \mathbf{X}(t_n+u)$ imaju jednake funkcije distribucije n -tog reda.
- Definicija: slučajni proces koji nije stacionaran zove se nestacionaran slučajni proces.

Definicija statističke nezavisnosti

- Dva procesa $\mathbf{X}(t)$ i $\mathbf{Y}(t)$ su statistički nezavisni ako je grupa slučajnih varijabli $\mathbf{X}(t_1), \dots, \mathbf{X}(t_N)$ nezavisna od grupe $\mathbf{Y}(t_1'), \dots, \mathbf{Y}(t_N')$ za bilo koji izbor trenutaka $t_1, \dots, t_N, t_1', \dots, t_N'$.
- Nezavisnost zahtijeva da vrijedi:

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_N, t_1, \dots, t_N, t_1', \dots, t_N') &= \\ &= f_X(x_1, \dots, x_N, t_1, \dots, t_N) f_Y(y_1, \dots, y_N, t_1', \dots, t_N') \end{aligned}$$

Stacionarnost prvog reda

- Definicija: Slučajni proces je stacionaran prvog reda ako se funkcija gustoće vjerojatnosti prvog reda ne mijenja s vremenom:

$$f_X(x, t) = f_X(x, t + \Delta t)$$

za svaki t i Δt .

- To znači da su i svi statistički deskriptori PDF prvog reda (srednja vrijednost, varijanca, momenti, ...) nepromjenjivi u vremenu.

Stacionarnost drugog reda

- Definicija: slučajni proces je stacionaran drugog reda ako vrijedi

$$f_X(x_1, x_2, t_1, t_2) = f_X(x_1, x_2, t_1 + \Delta t, t_2 + \Delta t)$$

- Stacionarnost drugog reda implicira stacionarnost prvog reda, što se vidi iz:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy$$

Stacionarnost drugog reda

- Ako u izrazu za definiciju stacionarnosti

$$f_X(x_1, x_2, t_1, t_2) = f_X(x_1, x_2, t_1 + \Delta t, t_2 + \Delta t)$$

- odaberemo npr. $\Delta t = -t_1$, tada dobivamo

$$f_X(x_1, x_2, t_1, t_2) = f_X(x_1, x_2, 0, t_2 - t_1)$$

- Dakle vidi se da f_X ovisi samo o razlici $t_2 - t_1$

Korelacija slučajnih varijabli

- Promatramo korelaciju dvaju slučajnih varijabli $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}(t_1)$ i $\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}(t_2)$ definiranu izrazom

$$E[\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_2] = E[\mathbf{X}(t_1) \mathbf{X}(t_2)]$$

- Vidi se da ova korelacija općenito ovisi o trenucima t_1 i t_2 .

Autokorelacijska funkcija slučajnog procesa

- Definicija: autokorelacijska funkcija slučajnog procesa $\mathbf{X}(t)$ definirana je izrazom:

$$R_{XX}(t_1, t_2) = E[\mathbf{X}(t_1) \mathbf{X}(t_2)]$$

- Autokorelacijska funkcija jednaka je korelaciji dvaju susjednih slučajnih varijabli.

Autokorelacijska funkcija slučajnog procesa

- Budući da korelacija dvaju slučajnih varijabli ovisi o funkciji gustoće drugog reda, slijedi da autokorelacijska funkcija stacionarnog procesa drugog reda ovisi samo o razlici $\tau = t_2 - t_1$.

$$R_{XX}(t_1, t_1 + \tau) = E[\mathbf{X}(t_1) \mathbf{X}(t_1 + \tau)] = R_{XX}(\tau)$$

Stacionarnost u širem smislu

- Stacionarnost u užem smislu je strog uvjet kojeg je teško provjeriti u praksi.

- Definicija: proces je stacionaran u širem smislu ako vrijedi:

$$E[\mathbf{X}(t)] = \text{konst}$$

$$E[\mathbf{X}(t) \mathbf{X}(t + \tau)] = R_{XX}(\tau)$$

Proces koji je stacionaran drugog reda je stacionaran i u širem smislu.

- Obrat ne vrijedi.

Vremensko usrednjavanje

- Definicija: vremensko usrednjavanje (ili prosjek) neke veličine definiran je kao:

$$A[.] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [.] dt$$

- Notacija A je analogna notaciji E za statistički prosjek.
- A je vremenski prosjek (engl. *time-average*).

Vremenska srednja vrijednost i autokorelacija

- Vremenska srednja vrijednost definirana je izrazom:

$$\bar{x} = A[x(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt$$

- Vremenska autokorelacijska funkcija definirana je izrazom:

$$R_{xx}(\tau) = A[x(t)x(t+\tau)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau) dt$$

Ergodičnost

- Ako je X stacionaran proces u širem smislu vrijedi:

$$E[\bar{x}] = E[\mathbf{X}(t)] = \bar{\mathbf{X}}$$

$$E[R_{xx}(\tau)] = R_{xx}(\tau)$$

- Definicija: slučajni proces je **ergodičan** ako je vremensko usrednjavanje jednako statističkom usrednjavanju.
- U praksi često možemo pretpostaviti da je proces ergodičan, a nekad nemamo drugog izbora (imamo samo jednu realizaciju).

Svojstva

- Za procese koji su stacionarni u širem smislu

$$R_{xx}(\tau) = E[\mathbf{X}(t)\mathbf{X}(t+\tau)]$$

- Tada vrijedi

$$|R_{xx}(\tau)| \leq R_{xx}(0)$$

$$R_{xx}(-\tau) = R_{xx}(\tau)$$

$$R_{xx}(0) = E[\mathbf{X}^2(t)]$$

Kros-korelacijska funkcija

- Definicija: kros-korelacijska funkcija dvaju slučajnih procesa $\mathbf{X}(t)$ i $\mathbf{Y}(t)$ definirana je kao

$$R_{xy}(t, t+\tau) = E[\mathbf{X}(t)\mathbf{Y}(t+\tau)]$$

- Ako su $\mathbf{X}(t)$ i $\mathbf{Y}(t)$ zajednički stacionarni u širem smislu onda je

$$R_{xy}(\tau) = E[\mathbf{X}(t)\mathbf{Y}(t+\tau)]$$

Ortogonalni slučajni procesi

- Definicija: Ako za dva slučajna procesa $\mathbf{X}(t)$ i $\mathbf{Y}(t)$ vrijedi

$$R_{xy}(t, t+\tau) = 0$$

onda su $\mathbf{X}(t)$ i $\mathbf{Y}(t)$ ortogonalni slučajni procesi.

Nezavisni slučajni procesi

- Definicija: ako su dva slučajna procesa $\mathbf{X}(t)$ i $\mathbf{Y}(t)$ statistički nezavisna onda vrijedi

$$R_{XY}(t, t + \tau) = E[\mathbf{X}(t)]E[\mathbf{Y}(t + \tau)]$$

- Ako su dva procesa još i stacionarni u širem smislu onda je

$$R_{XY}(t, t + \tau) = \overline{\mathbf{X}\mathbf{Y}} = \text{konst}$$

Svojstva kros-korelacijskih funkcija

- Kros-korelacijske funkcije imaju slijedeća svojstva

$$\begin{aligned} R_{XY}(-\tau) &= R_{YX}(\tau) \\ |R_{XY}(\tau)| &\leq \sqrt{R_{XX}(0)R_{YY}(0)} \\ |R_{XY}(\tau)| &\leq \frac{1}{2}[R_{XX}(0) + R_{YY}(0)] \end{aligned}$$

Auto-kovarijancijska funkcija

- Definicija: auto-kovarijancijska funkcija slučajnog procesa $\mathbf{X}(t)$ definirana je kao

$$\begin{aligned} C_{XX}(t, t + \tau) &= \\ &= E[\{\mathbf{X}(t) - E[\mathbf{X}(t)]\} \{\mathbf{X}(t + \tau) - E[\mathbf{X}(t + \tau)]\}] \end{aligned}$$

- Ovaj izraz može se pisati i kao

$$\begin{aligned} C_{XX}(t, t + \tau) &= \\ &= R_{XX}(t, t + \tau) - E[\mathbf{X}(t)]E[\mathbf{X}(t + \tau)] \end{aligned}$$

Kros-kovarijancijska funkcija

- Definicija: Kros-kovarijancijska funkcija dvaju slučajnih procesa $\mathbf{X}(t)$ i $\mathbf{Y}(t)$ definirana je izrazom:

$$\begin{aligned} C_{XY}(t, t + \tau) &= \\ &= E[\{\mathbf{X}(t) - E[\mathbf{X}(t)]\} \{\mathbf{Y}(t + \tau) - E[\mathbf{Y}(t + \tau)]\}] \end{aligned}$$

- Izraz se može pisati i u slijedećoj formi

$$\begin{aligned} C_{XY}(t, t + \tau) &= \\ &= R_{XY}(t, t + \tau) - E[\mathbf{X}(t)]E[\mathbf{Y}(t + \tau)] \end{aligned}$$

Slučaj stacionarnih procesa

- Za slučajne procese koji su zajednički stacionarni u širem smislu vrijede jednostavniji izrazi za auto-kovarijancijsku i kros-kovarijancijsku funkciju:

$$\begin{aligned} C_{XX}(\tau) &= R_{XX}(\tau) - \overline{\mathbf{X}}^2 \\ C_{XY}(\tau) &= R_{XY}(\tau) - \overline{\mathbf{X}\mathbf{Y}} \end{aligned}$$

Varijanca slučajnog procesa

- Definicija: varijanca slučajnog procesa je vrijednost auto-kovarijancijske funkcije za $\tau = 0$:

$$\sigma_x^2 = C_{XX}(t, t)$$

- Za proces koji je stacionaran u širem smislu vrijedi:

$$\sigma_x^2 = C_{XX}(t, t) = R_{XX}(0) - \overline{\mathbf{X}}^2 = \text{konst}$$

Nekorelirani slučajni procesi

- Definicija: Za dva slučajna procesa $\mathbf{X}(t)$ i $\mathbf{Y}(t)$ ako vrijedi

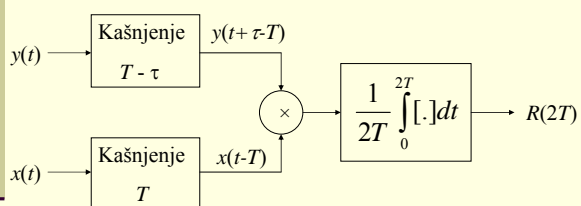
$$C_{xy}(t, t + \tau) = 0$$

onda su procesi nekorelirani.

Mjerenje korelacijske funkcije

- U praksi često ne možemo izmjeriti prave korelacijske funkcije dvaju procesa $\mathbf{X}(t)$ i $\mathbf{Y}(t)$ zato jer nemamo sve realizacije procesa.
- U tom slučaju jedan način je mjerenje vremenskim usrednjavanjem u dovoljno dugom intervalu i uz pretpostavku da se radi o ergodičnom procesu.

Mjerenje kros-korelacijske funkcije



Blok dijagram sustava za mjerenje kros-korelacijske funkcije

Mjerenje kros-korelacijske funkcije

- Ako u trenutku $t = 0$ započine integracija i ako promatramo izlaz $R(t)$ u trenutku $t = 2T$ onda

$$\begin{aligned} R(2T) &= \frac{1}{2T} \int_0^{2T} x(t-T)y(t-T+\tau)dt \\ &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t')y(t'+\tau)dt' \end{aligned}$$

- Dakle za $T \gg \tau$ vrijedi $R(2T) \approx R_{xy}(\tau) = R_{yx}(\tau)$

Mjerenje auto-korelacijske funkcije

- Ako na prethodnom blok dijagramu spojimo ulaze onda možemo mjeriti auto-korelacijsku funkciju slučajnog procesa pod pretpostavkom da je proces ergodičan.

Gaussov slučajni proces

- Definicija: Neka je za slučajni proces $\mathbf{X}(t)$ definirano N slučajnih varijabli $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}(t_1)$, $\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}(t_2)$, ..., $\mathbf{X}_N = \mathbf{X}(t_N)$ koje su definirane u N vremenskih trenutaka t_1, t_2, \dots, t_N .
- Neka su za bilo koji N i trenutke t_1, t_2, \dots, t_N ove varijable zajednički Gaussove, tj. imaju gustoću vjerojatnosti N -tog reda danu izrazom:

Gaussov slučajni proces

$$f_{\mathbf{x}}(x_1, \dots, x_N, t_1, \dots, t_N) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{C}_x^{-1}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})\right\}}{\sqrt{(2\pi)^N |\mathbf{C}_x|}}$$

gdje je vektor
 $\mathbf{x} = [x_1 \dots x_N]^T$

te

$$\bar{\mathbf{x}} = [\bar{x}_1 \dots \bar{x}_N]^T$$

vektor srednjih vrijednosti, a

Gaussov slučajni proces

$$\mathbf{C}_x = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1N} \\ \vdots & & & \vdots \\ C_{N1} & C_{N2} & \dots & C_{NN} \end{bmatrix}$$

kovarijancijska matrica čiji su elementi

$$C_{ij} = E[(\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}}_i)(\mathbf{X}_j - \bar{\mathbf{X}}_j)] = C_{xx}(t_i, t_k)$$

$$\bar{\mathbf{X}}_i = E[\mathbf{X}_i] = E[\mathbf{X}(t_i)]$$

Gaussov slučajni proces

- Iz definicije se vidi da je Gaussov slučajni proces određen s vektorom srednjih vrijednosti i kovarijancijskom matricom.
- Budući da vrijedi

$$C_{xx}(t_i, t_k) = R_{xx}(t_i, t_k) - E[\mathbf{X}(t_i)]E[\mathbf{X}(t_k)]$$

slijedi da je specifikacija Gaussovog procesa moguća i pomoću auto-korelacijske funkcije R_{xx} slučajnog procesa i srednjih vrijednosti.

Gaussov slučajni proces

- Ako Gaussov proces nije stacionaran onda srednje vrijednosti i auto-korelacijska funkcija ovise o vremenu.

Gaussov slučajni proces

- Ako je Gaussov proces stacionaran u širem smislu srednja vrijednost je konstantna

$$\bar{\mathbf{X}}_i = E[\mathbf{X}(t_i)] = \text{konst.}$$

dok auto-kovarijancijska i auto-korelacijska funkcija ovise samo o razlikama vremena, a ne o apsolutnom vremenu:

$$C_{xx}(t_i, t_k) = C_{xx}(t_k - t_i)$$

$$R_{xx}(t_i, t_k) = R_{xx}(t_k - t_i)$$