

Teorija signala

Doc. dr. Damir Seršić
<http://ts.zesoi.fer.hr>

Teme predavanja

- Paraunitarnost
- Ortogonalni filterski slogovi
- Spektralna faktorizacija
- Primjeri dizajna

2

Unitarne matrice

- Za svaku matricu za koju važi:

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = c \cdot \mathbf{I} \quad \text{za neki } c > 0.$$

- kažemo da je **unitarna**.
- Stupci takve matrice su međusobno ortogonalni, a norma im je ista: \sqrt{c}
- Takve matrice je lako invertirati:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{c} \cdot \mathbf{A}^T$$

- Matrica će ostati unitarna i ako joj neki od stupaca i/ili redaka pomnožimo sa $z \in \mathbb{C}$, $|z|=1$.

3

Definicija paraunitarne matrice

- Svojstva filterskog sloga u Z domeni opisuje modulacijska matrica.
- Članovi modulacijske matrice su funkcije kompleksne varijable z .
- Definicija: matrica $\mathbf{P}(z)$ je **paraunitarna**, ako je unitarna za vrijednosti z na jediničnoj kružnici ($|z|=1$).

$$|z|=1, z \in \mathbb{C} \leftrightarrow z = e^{j\omega}, \omega \in \mathbb{R}$$

$$\mathbf{P}^{*T}(e^{j\omega}) \cdot \mathbf{P}(e^{j\omega}) = c \cdot \mathbf{I}$$

4

Definicija paraunitarne matrice

$$\mathbf{P}^{*T}(e^{j\omega}) \cdot \mathbf{P}(e^{j\omega}) = c \cdot \mathbf{I}$$

$$\mathbf{P}^T(e^{-j\omega}) \cdot \mathbf{P}(e^{j\omega}) = c \cdot \mathbf{I}$$

- Odnosno, za svaki $z \neq 0$:

$$\mathbf{P}^T(z^{-1}) \cdot \mathbf{P}(z) = c \cdot \mathbf{I}$$

- Filterski slog kojem je analizirajuća modulacijska matrica paraunitarna čuva energiju signala i nazivamo ga ortogonalnim.

5

Paraunitarna modulacijska matrica

- Ako je \mathbf{H}_m paraunitarna (uz $c=2$) vrijedi:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} H_0(z^{-1}) & H_1(z^{-1}) \\ H_0(-z^{-1}) & H_1(-z^{-1}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}_m^T(z^{-1})} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} H_0(z) & H_0(-z) \\ H_1(z) & H_1(-z) \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}_m(z)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- Izraz je uvjet PR za filterski slog bez kašnjenja, a prvu matricu prepoznajemo kao sintetizirajuću \mathbf{F}_m , odnosno:

$$\mathbf{F}_0(z) = H_0(z^{-1}) \quad \mathbf{F}_1(z) = H_1(z^{-1})$$

6

Uvjeti ortogonalnosti

$$F_0(z) = H_0(z^{-1}), \quad F_1(z) = H_1(z^{-1})$$

- Zamjena $z \rightarrow z^{-1}$ odgovara preokretanju uzoraka impulsnog odziva u vremenskoj domeni: $f_0[n] = h_0[-n]$, $f_1[n] = h_1[-n]$.
- Za poništenje aliasinga odabrali smo:

$$F_0(z) = H_1(-z), \quad F_1(z) = -H_0(-z)$$
- Konačno, uvjet PR ortogonalnog sloga bez kašnjenja glasi:

$$H_0(z^{-1}) \cdot H_0(z) - H_0(-z^{-1}) \cdot H_0(-z) = 2.$$

Uvjeti ortogonalnosti

$$P(z) = H_0(z^{-1}) \cdot H_0(z).$$

- Očito, za ortogonalni filterski slog potrebno je polupojasni produkt filtera $P(z)$ faktorizirati u faktore $H_0(z^{-1})$ i $H_0(z)$.
- Često se uvjet PR ortogonalnog filterskog sloga izražava u spektralnoj domeni:

$$H_0(e^{-j\omega}) \cdot H_0(e^{j\omega}) - H_0(e^{-j\omega - j\pi}) \cdot H_0(e^{j\omega + j\pi}) = 2,$$

$$|H_0(e^{j\omega})|^2 + |H_0(e^{j(\omega + \pi)})|^2 = 2.$$

Spektralna faktorizacija

$$P(e^{j\omega}) = H_0(e^{-j\omega}) \cdot H_0(e^{j\omega}) = |H_0(e^{j\omega})|^2$$

- To je izraz za polupojasni filter u spektralnoj domeni.
- Postupak pronalaženja odgovarajućeg $H_0(e^{j\omega})$ iz $P(e^{j\omega})$ naziva se **spektralna faktorizacija**.
- Pokazuje se da rješenje postoji za $P(e^{j\omega}) \geq 0$.
- Uvjet je ispunjen za polupojasne filtre.
- Postupak spektralne faktorizacije nije jednostavan, a više predloženih metoda može se pronaći u literaturi.

Primjer faktorizacije

$$P_0(z) = (1 + z^{-1})^{2p} Q_{2p-2}(z)$$

- Neka je $P_0(z)$ maksimalno gladak binomni filter.
- Za sustav bez kašnjenja imamo:

$$P(z) = z^p (1 + z^{-1})^{2p} z^{p-1} Q_{2p-2}(z)$$
- Binomni dio je lako faktorizirati, jer su nultočke na jediničnoj kružnici, a potencija binoma je parna: $(1 + z^{-1})^p \cdot (1 + z)^p$

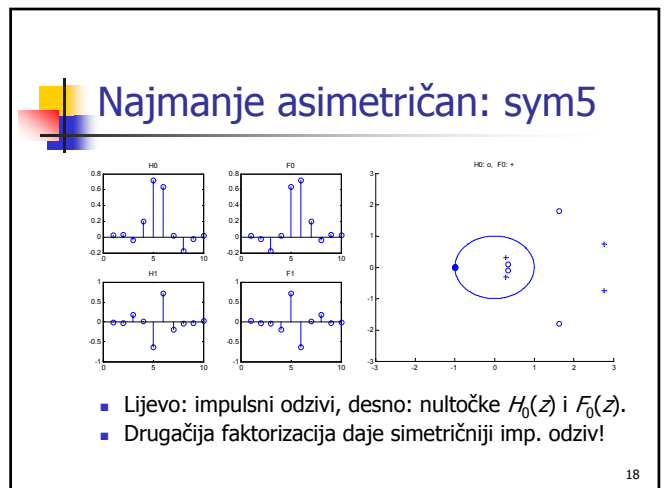
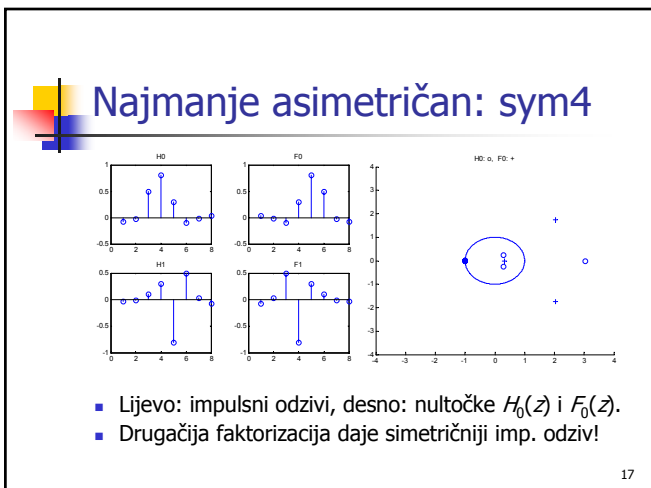
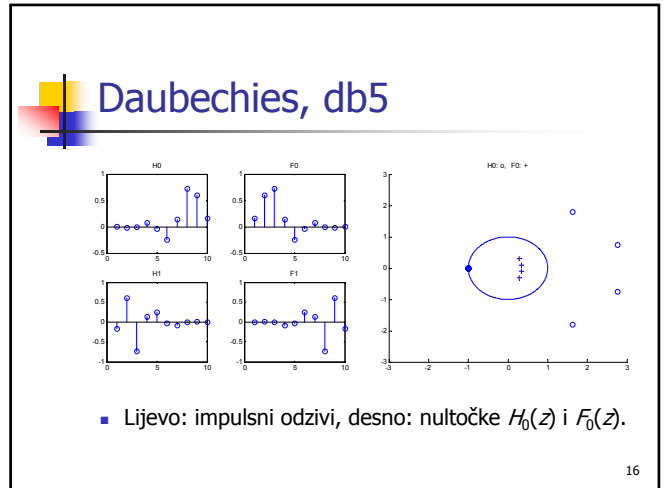
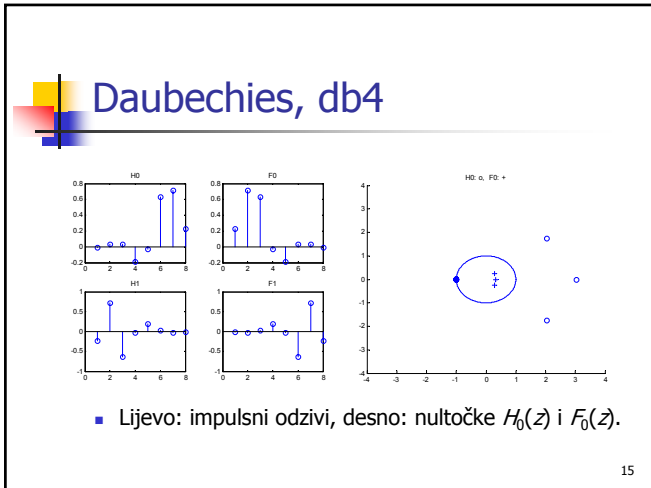
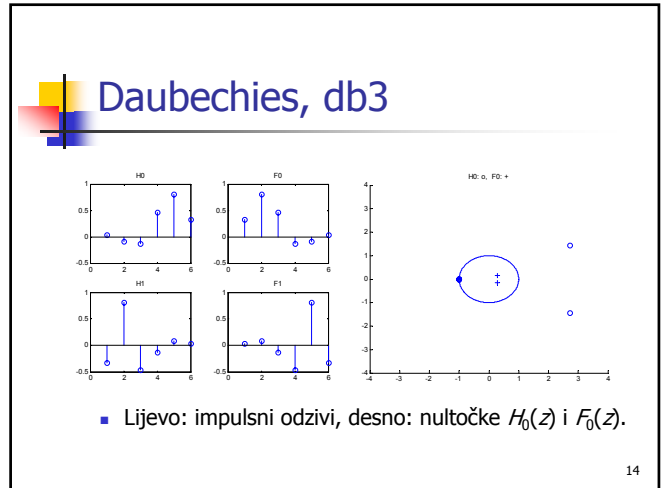
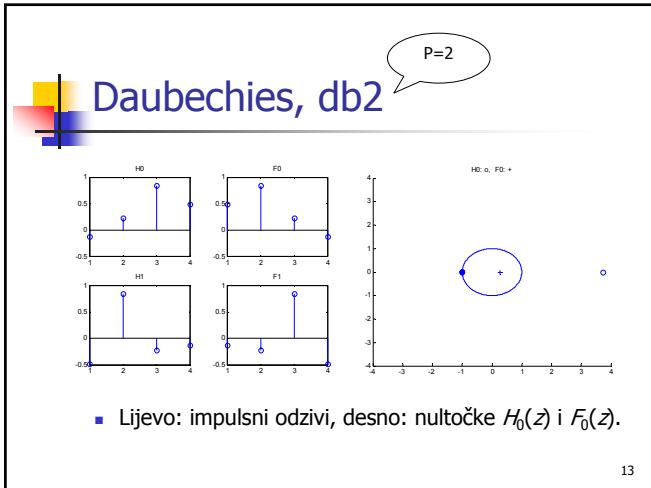
Primjer faktorizacije

- Pokazuje se da polinom $Q(z)$ uvijek sadrži parove nultočaka:

$$z_1 = r e^{j\theta}, \quad z_2 = \frac{1}{r} e^{j\theta}.$$
- Ortogonalna faktorizacija zahtjeva razdvajanje recipročnih nultočaka u različite faktore.
- Stoga orto filteri za $p > 1$ ne mogu biti simetrični.
- Daubechies izbor: $F_0(z)$ s nultočkama unutar jedinične kružnice (filter najmanje faze).

Daubechies, db1

- Lijevo: impulсни odzivi, desno: nultočke $H_0(z)$ i $F_0(z)$.



Druga rješenja

- $Q(z)$ višeg reda od minimalnog $2p-2$ radi postizanja željenih svojstava filtera (Coifman, ...).
- Simetrični ortogonalni filtri s približno "potpunom" rekonstrukcijom (Saramaki, ...).
- Birtogonalni filtri željenih svojstava (Vetterli, Unser, ...).

19

Teme predavanja

- Wavelet filterski slogovi
- Wavelet funkcija i funkcija skale
- Brza oktavna DWT
- Analiza signala DWT slogom
 - Frekvencijska analiza
 - Detekcija diskontinuiteta
 - Poništavanje polinoma
- Potiskivanje šuma metodom praga i druge primjene.

20

Wavelet filterski slogovi

- Znamo projektirati birtogonalne i ortogonalne maksimalno decimirane filterske slogove s potpunom rekonstrukcijom.
- Pitanje: mogu li se takvi slogovi iskoristiti za realizaciju oktavne DWT vremenski diskretnih signala?

21

Oktavna DWT kao slog filtera

- **Rekurzivna realizacija**

22

Wavelet stablo, analiza

- Rekurzivno izračunavanje koeficijenata DWT wavelet filterskim stablom.
- Razlaganje se ponavlja u niskopropusnoj grani.

23

Wavelet stablo, rekonstrukcija

- Rekurzivna rekonstrukcija signala wavelet filterskim stablom.
- Ako je svaki filterski slog s PR, jasno je i da je cijeli sustav s potpunom rekonstrukcijom.

24

Funkcije razlaganja

- Pitanje je koje su funkcije razlaganja u wavelet filterskom stablu i koja je veza s DWT transformacijom?
- U stablu se javlja kaskada decimatora i filtara.
- Zamjena redosljeda rezultira sljedećim relacijama (*eng. Noble Identities*):

$$\begin{aligned} X(z) \circlearrowleft M \rightarrow H(z) \rightarrow Y(z) &\equiv X(z) \rightarrow H(z^M) \rightarrow M \circlearrowleft Y(z) \\ X(z) \rightarrow H(z) \rightarrow Y(z) \circlearrowright 2 &\equiv X(z) \rightarrow H(z^2) \rightarrow Y(z) \circlearrowright 2 \end{aligned}$$

25

Wavelet stablo, analiza

- U N-toj razini imamo sljedeće kaskade filtara:

$$H_0^{(N)}(z) = \prod_{i=0}^{N-1} H_0(z^{2^i}) \quad H_1^{(N)}(z) = H_1(z^{2^{N-1}}) \prod_{i=0}^{N-2} H_0(z^{2^i})$$

26

Wavelet stablo, analiza

$$H_1^{(N)}(z) = H_1(z^{2^{N-1}}) \prod_{i=0}^{N-2} H_0(z^{2^i}) \quad H_0^{(N)}(z) = \prod_{i=0}^{N-1} H_0(z^{2^i})$$

- Filtri $H_1^{(M)}$ određuju funkcije razlaganja u različitim razinama wavelet stabla ("wavelet funkcije").
- Filtri $H_0^{(M)}$ određuju njima komplementarne funkcije razlaganja ("funkcije skale").
- Pogledat ćemo primjer.

27

Analizirajući filtri db2 u četiri razine razlaganja

- U višim razinama razlaganja impulzni odziv filtara zadržava "isti oblik", ali ima približno dvostruko trajanje.

28

Wavelet funkcija i funkcija skale

- Definiramo kontinuirane funkcije, koje su po odsječcima jednake impulsnim odzivima filtara.

$$\varphi_N(t) = 2^{N/2} h_{0N}[n], \quad \frac{n}{2^N} \leq t < \frac{n+1}{2^N}$$

$$\psi_N(t) = 2^{N/2} h_{1N}[n], \quad \frac{n}{2^N} \leq t < \frac{n+1}{2^N}$$

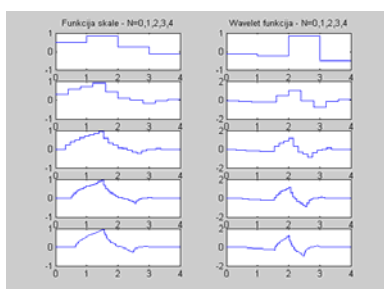
- Ovako definirane kontinuirane funkcije su normirane po vremenu i energiji.

29

db2: konvergencija analizirajuće funkcije skale i wavelet funkcije

30

db2: konvergencija rekonstrukcijskih funkcija



31

Wavelet funkcija i funkcija skale za db2

- Pridružene kontinuirane funkcije konstantne po odsječcima konvergiraju ako broj razina razlaganja N teži u beskonačno.
- U našem primjeru rezultirajuće funkcije su zadovoljavajuće glatke (regularne).
- Uvjet realizacije DWT diskretnih signala filtarskim slogom: **konvergencija** i **regularnost** pridruženih wavelet funkcija i funkcija skale kada broj razina razlaganja teži u beskonačnost.

32

Nužni i dovoljni uvjeti

- Pokazuje se da je za konvergenciju nužna nultočka niskopropusnog filtra $H_0(z)$ na $z=-1$, te vrijednost $\sqrt{2}$ na $z=1$:

$$H_0(z)|_{z=-1} = 0, \quad H_0(z)|_{z=1} = \sqrt{2};$$

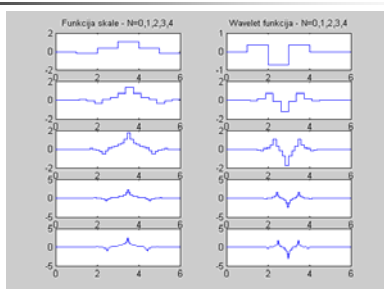
- Dovoljan uvjet (Mallat 89) je da NP filter nema nultočaka na jediničnoj kružnici u rasponu od $-\pi/2$ do $\pi/2$.

33

- Kod ortogonalnih slogova rekonstrukcijske funkcije su zrcalno preokrenute analizirajuće.
- Kod biortogonalnih slogova rekonstrukcijske funkcije redovito su sasvim različite od analizirajućih.
- Za brojne primjene (kompresija, potiskivanje šuma, ...) važnija nam je regularnost rekonstrukcijskih funkcija.

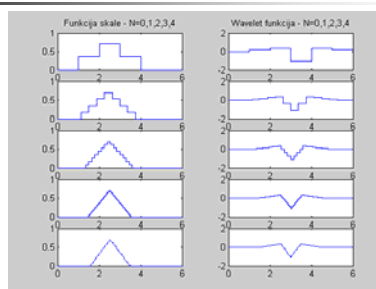
34

bior2.2: konvergencija analizirajuće funkcije skale i wavelet funkcije



35

bior2.2: konvergencija rekonstrukcijskih funkcija



36

Analizirajuća strana: filtarski koeficijenti i funkcije

- Neka funkcija skale i wavelet funkcija konvergiraju:

$$\varphi(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \varphi_N(t), \quad \psi(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \psi_N(t).$$

- Vrijede sljedeće veze s filtarskim koeficijentima:

$$\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{N_0} h_0[k] \varphi(2t-k) \quad \psi(t) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{N_1} h_1[k] \varphi(2t-k)$$

- Provjerit ćemo na primjeru.

37

Analizirajuća strana: filtarski koeficijenti i funkcije

$$\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{N_0} h_0[k] \varphi(2t-k) \quad \psi(t) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{N_1} h_1[k] \varphi(2t-k)$$

- Primjer (Haarov wavelet):

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1/2 \\ -1 & 1/2 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{drugdje} \end{cases} \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \quad N=2$$

$$h_1 = \{1, -1\} / \sqrt{2}$$

$$\psi(t) = \varphi(2t) - \varphi(2t-1)$$

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{drugdje} \end{cases} \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \quad h_0 = \{1, 1\} / \sqrt{2}$$

$$\varphi(t) = \varphi(2t) + \varphi(2t-1)$$

38

Brza oktavna DWT

$$\psi_{m,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^k}} \psi\left(\frac{t}{2^k} - m\right), \quad X[m,k] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \psi_{m,k}(t) dt$$

- Neka je $\Psi(t)$ wavelet funkcija (limes $\Psi_M(t)$), te neka je $\varphi(t)$ pripadna funkcija skale.
- Krenemo računanje na primjer od razine $k=0$:

$$A[m,0] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \varphi(t-m) dt$$

- $A[m,k]$ zovemo aproksimacijskim koeficijentima.

39

Brza oktavna DWT

- Kako je slijedi: $\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{N_1} h_1[k] \varphi(2t-k)$

$$\psi\left(\frac{t}{2} - m\right) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{N_1} h_1[k] \varphi(t-k-2m)$$

$$X[m,1] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sum_{k=0}^{N_1} h_1[k] \varphi(t-k-2m) dt$$

$$X[m,1] = \sum_{k=0}^{N_1} h_1[k] A[2m-k,0]$$

- Ovo odgovara filtriranju koeficijenata $A[m,0]$ filtrom h_1 , te decimaciji s faktorom 2.

40

Brza oktavna DWT

- Iz $\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{N_0} h_0[k] \varphi(2t-k)$ slijedi:

$$A[m,1] = \sum_{k=0}^{N_0} h_0[k] A[2m-k,0]$$

- To je filtriranje s h_0 i decimacija s faktorom 2.
- Konačno, imamo postupak za brzu DWT:
 - 1.) integriranjem signala pomnoženog s pomaknutim funkcijama izračunavamo aproksimacijske koeficijente $A[m,k_0]$.
 - 2.) Za dobivanje $X[m,k]$ za $k > k_0$ aproksimacijske koeficijente propustimo kroz wavelet filtarski slog!

41

Zaključci

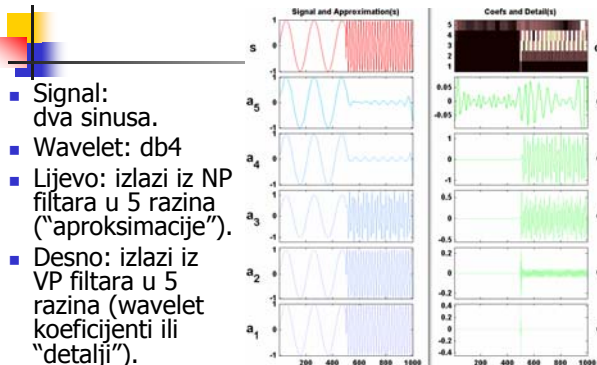
- Wavelet filtarski slog možemo koristiti za brzo računanje DWT.
- S druge strane, postupak dizajna filtarskog sloga možemo promatrati kao metodu projektiranja ortogonalnih ili biortogonalnih waveleta konačnog trajanja.

42

Analiza signala DWT slogom

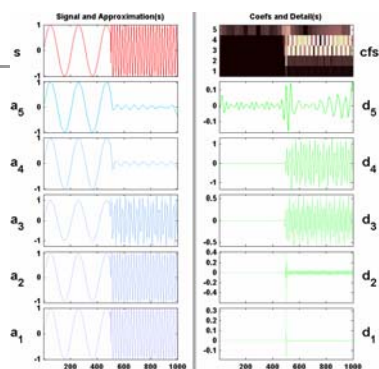
- Napraviti ćemo analizu više signala različitim DWT slogovima.
- Prvi primjer: signal je složen od dva sinusa različitim frekvencija.
- Analiza:
 - ortogonalnim wavelet filtarskim slogom db4.
 - ortogonalnim wavelet filtarskim slogom sym4.
 - Haarovim wavelet filtarskim slogom.

43



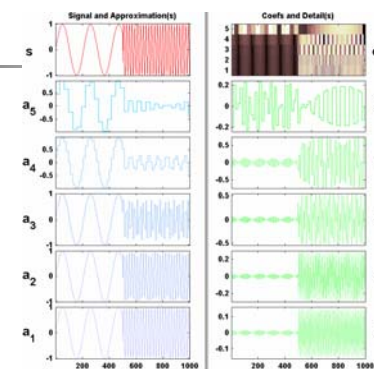
44

- Signal: dva sinusa.
- Wavelet: sym4
- Ortogonalno razlaganje uz najmanje nesimetrične funkcije daje nešto bolji opis.



45

- Signal: dva sinusa.
- Wavelet: Haar.
- Razlaganje sinusnog signala u wavelete konstantne po odsječcima ne daje dobar opis.



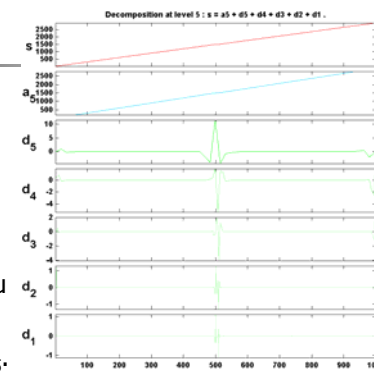
46

Analiza polinoma DWT slogom

- Drugi primjer: signal je složen od dva polinoma (ovdje pravca različitim nagiba).
- Analiza:
 - biortogonalnim wavelet filtarskim slogom bior2.2
 - Zapis $\text{bior}(m,n)$ znači m nultočaka rekonstrukcijskog filtra F_0 i n nultočaka analizirajućeg filtra H_0 na frekvenciji $\omega = \pi$.

47

- Signal: dva pravca.
- Wavelet: bior2.2
- Wavelet s $m=2$ poništava polinome drugog reda.
- Rezultat: pravci u a_5 , diskontinuitet u wavelet koeficijente d_1 - d_5 .



48

Nultočke, nul-momenti i poništavanje polinoma

- Krenimo od biortogonalnog filtarskog sloga i promatrajmo rekonstrukcijski NP filter F_0 .
- Neka F_0 ima m nultočaka na Nyquistovoj frekvenciji $\omega = \pi$.
- Onda vrijedi:

$$\sum_{n=0}^m (-1)^n n^j f_0[n] = 0 \quad za \quad j = 0, 1, \dots, m$$

49

Nultočke, nul-momenti i poništavanje polinoma

- m nultočaka od F_0 na $\omega = \pi$ znači:

$$F_0(\omega)|_{\omega=\pi} = F_0'(\omega)|_{\omega=\pi} = \dots = F_0^{(m-1)}(\omega)|_{\omega=\pi} = 0.$$

- Napišemo izraze za spektar i njegove derivacije na $\omega = \pi$:

$$F_0(\omega)|_{\omega=\pi} = \sum f_0[n] e^{-jn\pi} = \sum f_0[n] (-1)^n,$$

$$F_0'(\omega)|_{\omega=\pi} = \sum f_0[n] (-jn) e^{-jn\pi} = \sum f_0[n] (-jn) (-1)^n,$$

...

Izjednačavanje svih izraza s nulom daje rezultat s prethodnog slajda.

50

Nultočke, nul-momenti i poništavanje polinoma

- Filter F_0 određuje analizirajući VP filter H_1 :

$$h_1[n] = (-1)^n \cdot f_0[n]$$

- pa imamo:

$$\sum_{n=0}^m n^j h_1[n] = 0 \quad za \quad j = 0, 1, \dots, m$$

- Analizirajuća wavelet funkcija $\psi(t)$ nastaje kaskadnim algoritmom iz h_1 , stoga se može pokazati:

$$\int t^j \psi(t) dt = 0 \quad za \quad j = 0, 1, \dots, m$$

51

Nultočke, nul-momenti i poništavanje polinoma

- Wavelet funkcija $\psi(t)$ ima m nul-momenata (*eng. vanishing moments*).
- Ako je analizirani signal polinom m -tog reda, wavelet koeficijenti će redom biti jednaki nuli.
- Takvo wavelet razlaganje **poništava** (*eng. annihilates*) **polinome**: informacija se prenosi isključivo u aproksimacijskim koeficijentima.
- Kako se svaka glatka funkcija može predstaviti polinomom u nekoj okolini, ovo je izuzetno važno svojstvo za koncentriranje informacije.

52

Nultočke, nul-momenti i poništavanje polinoma

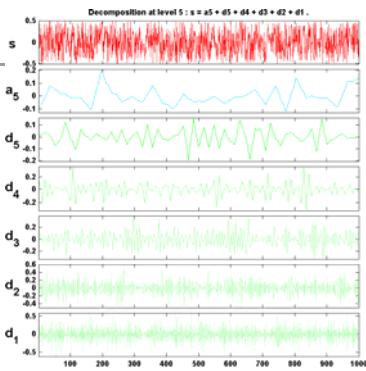
- Zaključak:
Wavelet razlaganje je dobro za opis signala sastavljenih od odsječaka glatkih funkcija.
- Takvi su mnogi realni signali i slike!

53

Analiza šuma DWT slogom

- Treći primjer: signal je bijeli šum.
- Analiza:
 - ortogonalnim wavelet filtarskim slogom.

54



Decomposition at level 5: $s = a_5 + d_5 + d_4 + d_3 + d_2 + d_1$

- Signal: bijeli šum.
- Wavelet: db3
- Šum se distribuira po wavelet koeficijentima u svim razinama razlaganja.

55

Potiskivanje šuma

- Četvrti primjer: signal je sastavljen od odsječaka polinoma s pribrojenim bijelim šumom.
- Analiza:
 - wavelet filtarskim slogom bez decimacije.

56

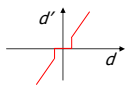
Potiskivanje šuma

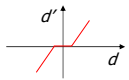
- Korisni signal sastavljen od odsječaka polinoma ili glatkih funkcija će se preslikati u mali broj wavelet i aproksimacijskih koeficijenata velike vrijednosti.
- Bijeli šum će se distribuirati po svim wavelet koeficijentima.

57

Potiskivanje šuma

- Ideja (dvije varijante):
 - Odbaciti wavelet koeficijente ispod nekog praga (eng. *hard thresholding*)
 - Odbaciti wavelet koeficijente ispod praga a ostale umanjiti za iznos praga (eng. *soft thresholding*).

$$d'[n] = \begin{cases} d[n] & |d[n]| > \varepsilon, \\ 0 & |d[n]| \leq \varepsilon. \end{cases}$$


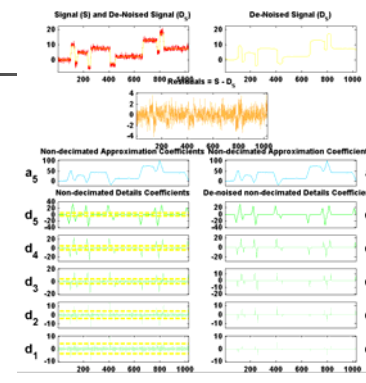
$$d'[n] = \begin{cases} \text{sgn}(d[n]) (|d[n]| - \varepsilon) & |d[n]| > \varepsilon, \\ 0 & |d[n]| \leq \varepsilon. \end{cases}$$


58

Potiskivanje šuma

- Prag se odabire tako da se potisne većina šuma.
- Prva varijanta daje manju pogrešku pri rekonstrukciji signala u smislu najmanjih kvadrata.
- Druga je redovito bolja u primjenama, osobito kod potiskivanja šuma u slici jer nema naglih skokova u vrijednosti koeficijenata.
- Bolje rezultate se postiže wavelet filtarskim slogom **bez decimacije**.

59



Signal (S) and De-Noise Signal (D_n)

De-Noise Signal (D_n)

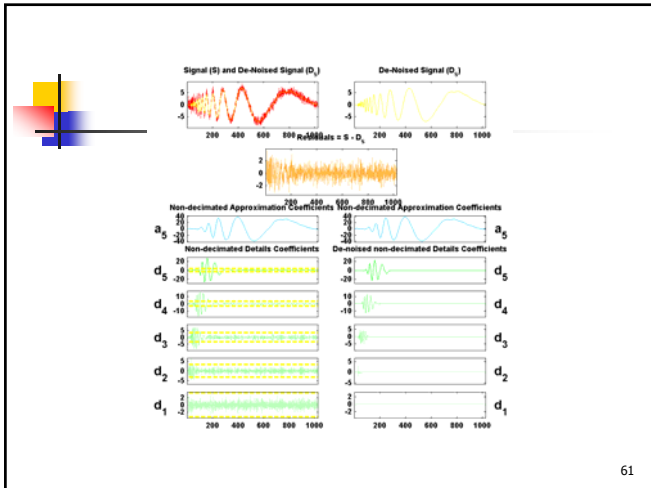
Non-decimated Approximation Coefficients

Non-decimated Details Coefficients

De-noised non-decimated Approximation Coefficients

De-noised non-decimated Details Coefficients

60

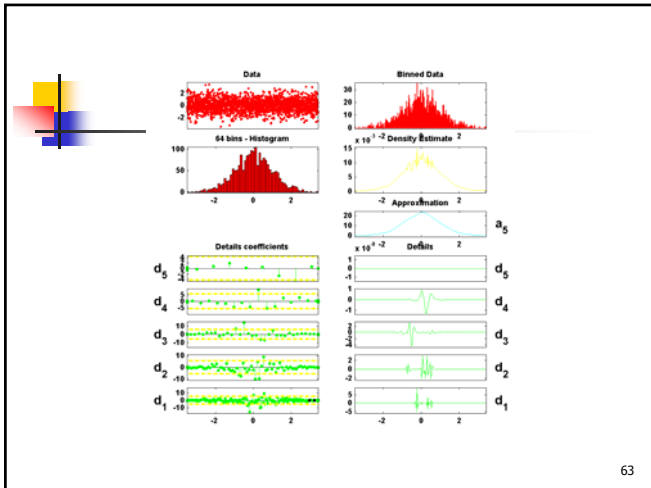


61

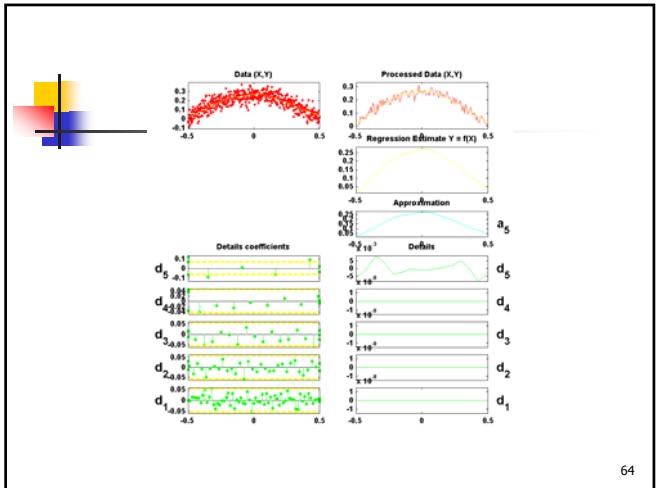
Druge primjene

- Metoda praga može se koristiti i za brojne druge primjene.
- Procjena funkcije gustoće vjerojatnosti
 - Na podacima iz histograma napravi se wavelet analiza, a metodom praga rezultati se učine glatkim.
- Wavelet regresija
 - Umjesto polinomom, funkcijska ovisnost se aproksimira wavelet funkcijama.

62



63



64