Teorija signala

Doc. dr. Damir Seršić
http://ts.zesoi.fer.hr

Teme predavanja

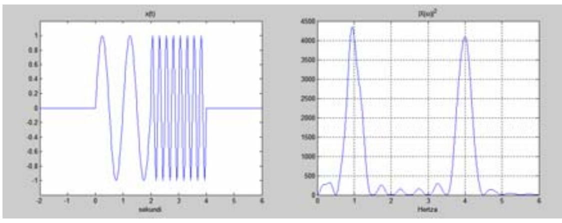
- Motivacija za vremensko-frekvencijske obrade
- STFT – Fourierova transformacija na vremenskom otvoru
  - definicija,
  - svojstva,
  - primjeri.
- Diskretna STFT, Gaborova ekspanzija
  - definicija,
  - svojstva.

Motivacija za T-F analizu

- Fourierova analiza daje nam uvid u frekvencijski sadržaj analiziranog signala.
- Pod pojmom "frekvencijski sadržaj" podrazumijevaju se harmonijske funkcije.
- Harmonijske funkcije nisu lokalizirane u vremenu.
- Stoga rezultat analize nema eksplicitnu vremensku dimenziju.

Motivacija za T-F analizu

- Signal promjenjivih svojstava: dva sinusa.



- Vide se ili vremenski ili frekvencijski odnosi.

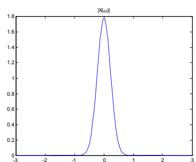
Motivacija za T-F analizu

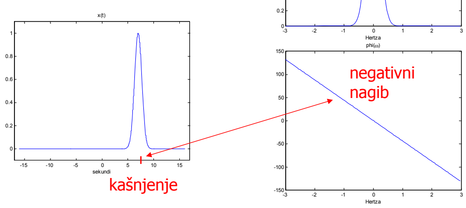
- Vremenski odnosi su ugrađeni u frekvencijsku karakteristiku, ali nisu uvijek eksplicitno vidljivi.
- Poznata mjera, koja se dobiva iz fazne karakteristike je grupno kašnjenje:

$$X(\omega)=A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}, \qquad T(\omega)=-\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}.$$

Grupno kašnjenje $T(\omega)=-\dfrac{d\varphi(\omega)}{d\omega}.$

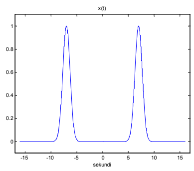
- Grupno kašnjenje ima jasan smisao ako se "frekvencijski sadržaj" analiziranog signala događa u jednoj vremenskoj točki.

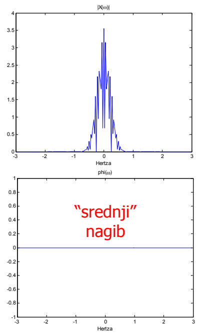




Grupno kašnjenje $T(\omega) = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}.$

- Grupno kašnjenje nije dobra mjera ako se identični frekvencijski sadržaj analiziranog signala događa u više vremenskih točaka.





7

Trenutna frekvencija

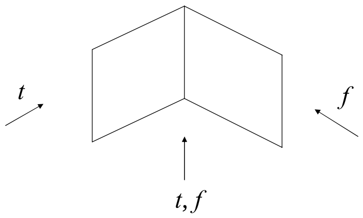
- Analogna mjera za kompleksne signale u vremenskoj domeni je trenutna frekvencija:

$$x(t) = a(t)e^{j\phi(t)}, \qquad f(t) = \frac{d\phi(t)}{dt}.$$

- Njezin je smisao također upitan ako u identičnoj vremenskoj točki postoji više od jedne frekvencije u signalu.

8

Vremensko frekvencijska (T-F) analiza



- Želimo takvu transformaciju da istovremeno opažamo vremenske i frekvencijske odnose

9

FT na vremenskom otvoru - STFT

- Umjesto

$$e^{j\omega t} \rightarrow g(t-\tau)\,e^{j\omega t}$$

- $g(t)$ – lokalni analizirajući otvor željenih svojstava u obje domene, τ – pomak.
- Rezultat: STFT.

$$X(\tau,\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)g^*(t-\tau)\,e^{-j\omega t}dt$$

- Za realne $g(t)$ ne treba konjugacija * (mi ćemo to u nastavku često podrazumijevati).

10

STFT

$$X(\tau,\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)g(t-\tau)\,e^{-j\omega t}dt$$

- Rezultat $X(\tau, \omega)$ očito:
  - ima dimenziju više od dimenzije signala,
  - ovisi o odabranom vremenskom otvoru.
- Funkcije razlaganja čine neprebrojiv i redundantan skup (po τ i ω):

$$\left\{g(t-\tau)\,e^{j\omega t}\right\}$$

11

STFT, razlučivost

$$\left\{g(t-\tau)\,e^{j\omega t}\right\}$$

- Uslijed otvora g, funkcije razlaganja su lokalizirane u vremenu i frekvenciji.
- Pitanja:
  - gdje su centri koncentracije energije
  - i kolika je efektivna širina
- funkcija razlaganja u obje domene?

12

STFT, središta koncentracije

- Središte koncentracije energije u vremenskoj domeni:

$$t_c = \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} t\left|g(t-\tau)\,e^{j\omega t}\right|^2 dt}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|g(t-\tau)\,e^{j\omega t}\right|^2 dt} = \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} t\left|g(t-\tau)\right|^2 dt}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|g(t-\tau)\right|^2 dt}$$

- Za funkciju g konačne energije supstitucijom $t' = t+\tau$ dobivamo $t_c = t_g + \tau$.
- Najčešći izbor je g simetrična oko nule ($t_g = 0$), a tada je $t_c = \tau$.
- Središte koncentracije je u potpunosti određeno vremenskim pomakom τ, a veza je linearna.

13

STFT, središta koncentracije

- U frekvencijskoj domeni (oznaka w) imamo:

$$\left\{g(t-\tau)\,e^{j\omega t}\right\} \;\circ\!\!-\!\!\circ\; \left\{G(w-\omega)\,e^{j(w-\omega)\tau}\right\}$$

- Središte koncentracije u frekvencijskoj domeni je:

$$w_c = \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} w\left|G(w-\omega)e^{j(w-\omega)\tau}\right|^2 dw}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|G(w-\omega)e^{j(w-\omega)\tau}\right|^2 dw} = \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} w\left|G(w-\omega)\right|^2 dw}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|G(w-\omega)\right|^2 dw} = w_G + \omega.$$

- Najčešći izbor je niskopojasni $G(w)$ simetričan oko nule ($w_G = 0$), a tada je $w_c = \omega$. Veza je linearna.

14

STFT, efektivne širine

- Vremenska efektivna širina:

$$\Delta_t^2 = \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(t-\tau)^2\left|g(t-\tau)\,e^{j\omega t}\right|^2 dt}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|g(t-\tau)\,e^{j\omega t}\right|^2 dt} = \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(t')^2\left|g(t')\right|^2 dt'}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|g(t')\right|^2 dt'} = \Delta_g^2$$

- Frekvencijska efektivna širina:

$$\Delta_f^2 = \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(w-\omega)^2\left|G(w-\omega)\,e^{j(w-\omega)\tau}\right|^2 dw}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|G(w-\omega)\,e^{j(w-\omega)\tau}\right|^2 dw} = \ldots = \Delta_G^2$$

15

STFT, razlučivost

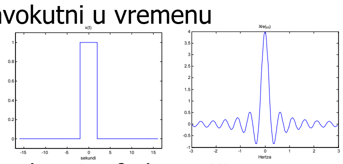
$$\left\{g(t-\tau)\,e^{j\omega t}\right\}$$

- Centri koncentracije energije funkcija razlaganja u obje domene su linearno ovisni o pomaku τ i frekvenciji ω.
- Efektivna širina funkcija razlaganja u obje domene je konstantna i definirana svojstvima vremenskog otvora.
- Odnos širina zadaje princip neodređenosti.

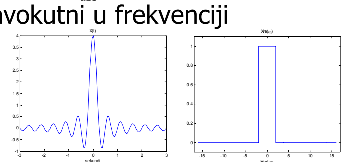
16

Izbor otvora

- Pravokutni u vremenu



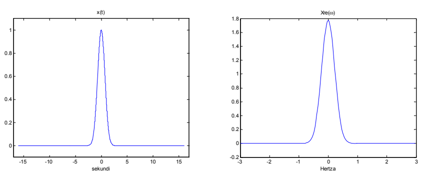
- Pravokutni u frekvenciji



17

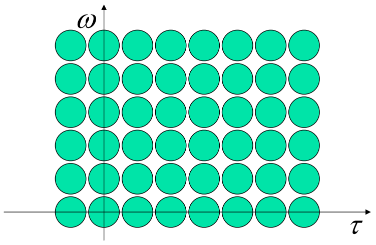
Izbor otvora

- Idealna lokalizacija u jednoj domeni uzrokuje lošu lokalizaciju u drugoj.
- Najmanji produkt efektivnih širina daje Gaussov otvor.



18

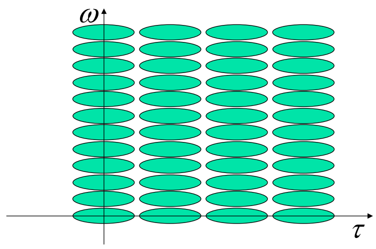
Razlučivost u T-F ravnini



- Središta elipsi predstavljaju centre funkcija razlaganja (τ, ω), a dimenzije efektivne širine.
- Svojstva, odnosno geometrija funkcija razlaganja u T-F ravnini je konstantna.

19

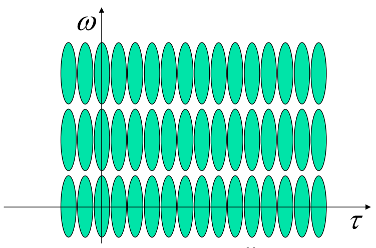
Razlučivost u T-F ravnini



- Smanjenje efektivne širine u jednoj domeni (povećanje rezolucije) dovodi do povećanja u drugoj (smanjenje rezolucije).

20

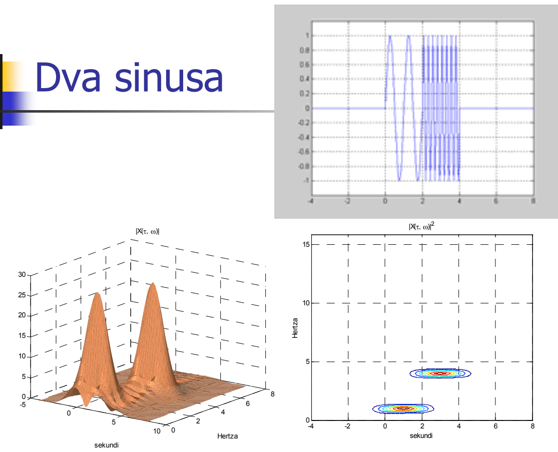
Razlučivost u T-F ravnini



- Smanjenje efektivne širine u jednoj domeni (povećanje rezolucije) dovodi do povećanja u drugoj (smanjenje rezolucije).

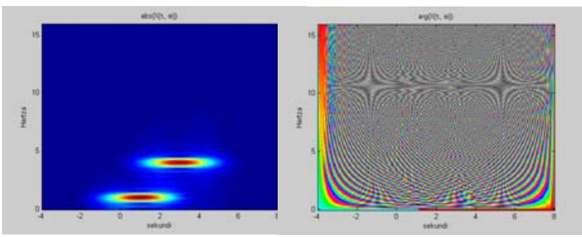
21

Dva sinusa



22

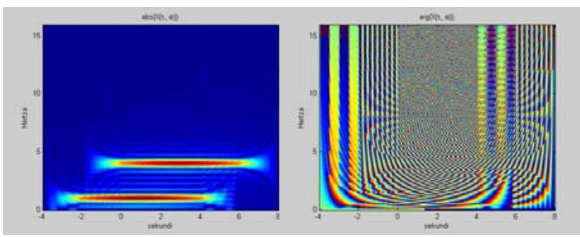
Dva sinusa, Gaussov otvor



- Lijevo: amplituda, desno faza

23

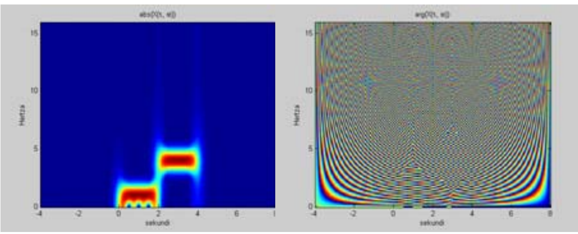
Dva sinusa, širi Gaussov otvor



- Veća neodređenost u vremenu, manja u frekvenciji.

24

Dva sinusa, uži Gaussov otvor



- Veća neodređenost u frekvenciji, manja u vremenu.

STFT, inverzna formula

$$X(\tau,\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)g^*(t-\tau)\, e^{-j\omega t}dt$$

- Analogijom s Fourierovim integralom, pretpostavimo da postoji inverzna formula oblika:

$$x(t)=\frac{1}{2\pi\,\mathrm{C}}\int_{\tau=-\infty}^{+\infty}\int_{\omega=-\infty}^{+\infty} X(\tau,\omega)\, h(t-\tau)\, e^{j\omega t}d\omega\, d\tau$$

- gdje je *h* za sada nepoznata funkcija, a C nepoznata konstanta.

STFT, inverzna formula

$$x(t)=\frac{1}{2\pi\,\mathrm{C}}\int_\tau\int_\omega \overbrace{\int_{t'} x(t')g^*(t'-\tau)\, e^{-j\omega t'}dt'}^{X(\tau,\omega)}\, h(t-\tau)\, e^{j\omega t}d\omega\, d\tau$$

- Promijenimo redoslijed integracije:

$$x(t)=\frac{1}{2\pi\,\mathrm{C}}\int_{t'} x(t')\underbrace{\int_\omega e^{-j\omega(t'-t)}d\omega}_{2\pi\delta(t'-t)}\int_\tau g^*(t'-\tau)h(t-\tau)\, d\tau\, dt'$$

- Integral preko Diracove funkcije lako riješimo.

STFT, inverzna formula

$$x(t)=\frac{1}{\mathrm{C}}x(t)\int_\tau g^*(t-\tau)h(t-\tau)\, d\tau$$

- Očito, za jednakost mora važiti:

$$\int_x g^*(x)\, h(x)\, dx=\mathrm{C}$$

- Dobar izbor:

$$h(t)=g(t),\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\left|g(t)\right|^2 dt=\left\|g\right\|^2=\mathrm{C}.$$

STFT, inverzna formula

- Konačno imamo transformacijski par:

$$X(\tau,\omega)=\int_t x(t)g^*(t-\tau)\, e^{-j\omega t}dt,$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi\left\|g\right\|^2}\int_\tau\int_\omega X(\tau,\omega)\, g(t-\tau)\, e^{j\omega t}d\omega\, d\tau;$$

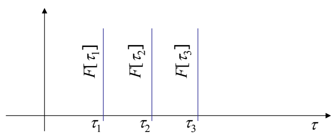
- uz jedini uvjet da je otvor *g* konačne energije.
- Ako se *g* odabere takav da mu je energija jednaka 1, izraz se pojednostavljuje.

Postupak računanja STFT

- A) Kao niz Fourierovih transformacija za različite vremenske pomake τ:

$$X(\tau,\omega)=\int_t \left[x(t)g^*(t-\tau)\right]e^{-j\omega t}dt,$$

$$X(\tau,\omega)=Fourier\left[x(t)g^*(t-\tau)\right].$$



Postupak računanja STFT

- B) Kao slog filtracija za različite frekvencijske pomake ω:

$$X(\tau,\omega)=\int_t\left[x(t)\cdot e^{-j\omega t}\right]g^*(t-\tau)\,dt.$$

- Za $\omega=0$ važi:

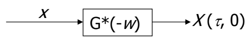
$$X(\tau,0)=\int_t x(t)\,g^*\left[-(\tau-t)\right]dt.$$

- Dobiveni izraz predstavlja konvolucijski integral funkcija $x(t)$ i $g^*(-t)$.

31

Postupak računanja STFT

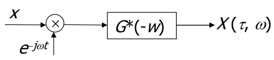
- Konvolucija $x(t)$ i $g^*(-t)$ odgovara filtriranju:



- Za $\omega\neq 0$ imamo:

$$X(\tau,\omega)=\int_t\left[x(t)\cdot e^{-j\omega t}\right]g^*\left[-(\tau-t)\right]dt.$$

- što možemo prikazati kao:

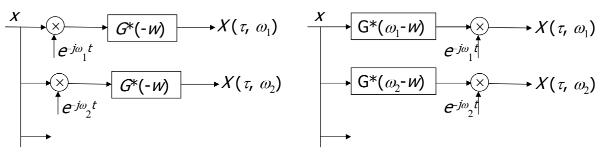


- Množenju sa $e^{-j\omega t}$ odgovara pomak u Fourierovoj domeni: $X(w+\omega)$.

32

STFT kao slog filtara

- Jednostavnom supstitucijom frekvencijski pomak signala možemo nadomjestiti frekvencijskim pomakom filtra.
- Konačno, STFT možemo računati slogom ekvidistantnih filtara:



33

Diskretizacija STFT

$$X(\tau,\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)g^*(t-\tau)\,e^{-j\omega t}dt$$

- Diskretizacija usklađena s razlučivošću:
- $\tau = mT;\quad \omega = k\Omega.$

$$X\left[mT,k\Omega\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)g^*(t-mT)\,e^{-jk\Omega t}dt$$

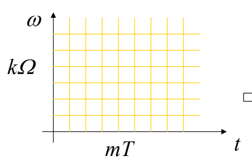
34

Diskretizacija STFT

$$X\left[mT,k\Omega\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)g^*(t-mT)\,e^{-jk\Omega t}dt$$

- Funkcije razlaganja čine prebrojiv skup:

$$\left\{g_{m,k}(t)\right\}\qquad g_{m,k}(t)=g(t-\underbrace{mT}_{\substack{\text{diskretni}\\ \text{vremenski}\\ \text{pomak}}})\;\underbrace{e^{jk\Omega t}}_{\substack{\text{diskretni}\\ \text{frekvencijski}\\ \text{pomak}}}$$



jednolika kvantizacija T-F ravnine

35

Diskretizacija STFT

- Da li se iz diskretnog skupa koeficijenata $X[m,k]$ može restaurirati analizirani signal $x(t)$ i to na numerički stabilan način?

$$x(t)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X\left[m,k\right]\cdot g_{m,k}(t)$$

- Rekonstrukcijska (inverzna) formula poznata je pod nazivom Gaborova ekspanzija signala.
- $X[m,k]$ je mjera sadržaja $x(t)$ na lokaciji mT, $k\Omega$.
- Kada je moguća rekonstrukcija?

36

Potrebna svojstva

- Signal konačne energije mora se preslikati u spektar konačne energije (ne nužno iste).
  - Energija signala: $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt$
  - Energija spektra: $\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X[m,k]|^2$
  - Uvjet vodi na formulaciju:

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X[m,k]|^2 \le B \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt$$

B je neka pozitivna konstanta

37

Potrebna svojstva

- Inverzna transformacija mora spektar konačne energije vratiti u signal konačne energije.
  - Uvjet vodi na formulaciju:

$$A \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt \le \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X[m,k]|^2$$

A je neka pozitivna konstanta

  - Oba uvjeta zajedno:

$$A \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt \le \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X[m,k]|^2 \le B \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt,$$

$$0 < A \le B < \infty.$$

38

Dovoljan uvjet

- Rekonstrukcija je moguća i to na numerički stabilan način ako postoje dvije konstante A i B za koje vrijedi:

$$\mathrm{A} \underbrace{\|x\|^2}_{energija\ signala} \le \underbrace{\sum_{m,k} \|X[m,k]\|^2}_{energija\ koeficijenata} \le \mathrm{B} \underbrace{\|x\|^2}_{energija\ signala}$$

$$0 < \mathrm{A} \le \mathrm{B} < \infty$$

- Razlaganje može biti i redundantno ili neuniformno, a konstante A i B zadaju energetski okvir transformacije (*engl. frame*).

39

Dovoljan uvjet

- Kako u konkretnom slučaju Gaborove ekspanzije pronaći zadovoljavajuće funkcije razlaganja $\{g_{m,k}(t)\}$?
- Teoriju okvira (*eng. frame theory*) za slučaj GE, odnosno diskretne STFT, izučavali su Weyl, Heisenberg, Gabor i mnogi drugi.
- Jedan od važnijih rezultata je teorem otipkavanja.

40

Nužan uvjet rekonstrukcije

- $T\Omega > 2\pi$ podotipkavanje
  - rekonstrukcija nije moguća.
- $T\Omega = 2\pi$ granični (kritični) slučaj
  - moguća rekonstrukcija,
  - ne mogu se postići dobra svojstva lokalizacije u obje domene.
- $T\Omega < 2\pi$ nadotipkavanje
  - moguća rekonstrukcija,
  - redundantno razlaganje,
  - mogu se postići dobra svojstva u obje domene.

41

Teme predavanja

- Motivacija za nejednoliku razlučivost
- CWT – Kontinuirana wavelet transformacija
  - definicija,
  - svojstva,
  - primjeri.
- DWT - Diskretna wavelet transformacija
  - definicija,
  - svojstva,
  - DWT filtarski slog.

42

Motivacija za nejednoliku razlučivost

- Razlučivost razlaganja je kod STFT-a određena svojstvima vremenskog otvora.
- Odabrani kompromis uslijed principa neodređenosti vrijedi za cijelu T-F ravninu.
- Često jedna vremenska točka analiziranog signala ima složen frekvencijski sadržaj.
- Za takve signale bi odgovarala analiza koja nema konstantnu rezoluciju.
- U tom slučaju bi ukupno određenje složenog signala moglo biti preciznije od određenja u jednoj točki T-F ravnine.

43

Kontinuirana wavelet transformacija

- Umjesto $$g(t-\tau)\,e^{j\omega t} \;\to\; \frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right)$$
- $\psi(t)$ – lokalni analizirajuća funkcija željenih svojstava u obje domene, τ – pomak, a – skala.
- Rezultat: CWT.
$$X(\tau,a)=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\,\psi^*\left(\frac{t-\tau}{a}\right)dt$$
- Za realne $\psi(t)$ ne treba konjugacija * (mi ćemo to u nastavku često podrazumijevati).

44

CWT

$$X(\tau,a)=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\,\psi^*\left(\frac{t-\tau}{a}\right)dt$$

- Rezultat $X(\tau, a)$:
  - ima dimenziju više od dimenzije signala,
  - ovisi o odabranom "valiću" $\psi(t)$,
  - funkcija razlaganja nije ograničena samo na kompleksnu harmonijsku funkciju $e^{j\omega t}$,
  - "valić" $\psi(t)$ osigurava željena svojstva razlaganja,
  - analizirajuću funkciju pomičemo za τ, stežemo ili rastežemo za skalu a i uspoređujemo s $x(t)$,
  - "skala" a je veličina obrnuto proporcionalna frekvenciji.

45

CWT, razlučivost

$$\frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right)$$

- Otvor ψ određuje lokalizaciju u vremenu i skali.
- Pitanja:
  - gdje su centri koncentracije energije
  - i kolika je efektivna širina
- funkcija razlaganja u obje domene?

46

CWT, središta koncentracije

- Središte koncentracije energije u vremenskoj domeni:

$$t_c=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}t\left|\frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right)\right|^2dt}{\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right)\right|^2dt}=\left|\begin{array}{l}\text{supst.}\\ t'=\dfrac{t-\tau}{a}\\ dt'=\dfrac{dt}{a}\end{array}\right|=\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}(at'+\tau)\left|\frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi(t')\right|^2a\,dt'}{\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi(t')\right|^2a\,dt'}$$

$$=a\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}t|\psi(t)|^2dt}{\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi(t)|^2dt}+\tau\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi(t)|^2dt}{\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi(t)|^2dt}=at_\psi+\tau.$$

47

CWT, središta koncentracije

- Konačno, središte koncentracije energije u vremenskoj domeni je:
$$t_c=at_\psi+\tau.$$
- Čest (ali ne i jedini) izbor je ψ simetrična oko nule ($t_\psi = 0$), a tada je $t_c = \tau$.
- Središte koncentracije je u potpunosti određeno vremenskim pomakom τ, a veza je linearna.

48

CWT, središta koncentracije

- U frekvencijskoj domeni imamo:

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right)\right\} \circ\!-\!\circ \left\{\sqrt{a}\cdot\Psi(a\omega)e^{-j\omega\tau}\right\}$$

- Središte koncentracije u frekvencijskoj domeni je:

$$\omega_c^+ = \frac{\int_0^{+\infty}\omega\left|\sqrt{a}\cdot\Psi(a\omega)e^{-j\omega\tau}\right|^2 d\omega}{\int_0^{+\infty}\left|\sqrt{a}\cdot\Psi(a\omega)e^{-j\omega\tau}\right|^2 d\omega} = \frac{\int_0^{+\infty}\omega\left|\Psi(a\omega)\right|^2 d\omega}{\int_0^{+\infty}\left|\Psi(a\omega)\right|^2 d\omega} = \frac{\omega_\Psi^+}{a}.$$

$$\omega_c^+ = \omega_\Psi^+ / a.$$

- Veza središta ω_c i skale a nije linearna!

49

CWT, efektivne širine

- Vremenska efektivna širina:

$$\Delta_t^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty}(t-\tau)^2\left|\frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right)\right|^2 dt}{\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right)\right|^2 dt} = \ldots = a^2\cdot\Delta_\psi^2$$

$$\boxed{\Delta_t = a\cdot\Delta_\psi \qquad \Delta_f = \frac{\Delta_\Psi}{a}}$$

- Frekvencijska efektivna širina:

$$\Delta_f^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty}(\omega-\omega_\Psi)^2\left|\sqrt{a}\cdot\Psi(a\omega)e^{-j\omega\tau}\right|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\sqrt{a}\cdot\Psi(a\omega)e^{-j\omega\tau}\right|^2 d\omega} = \ldots = \frac{\Delta_\Psi^2}{a^2}$$

50

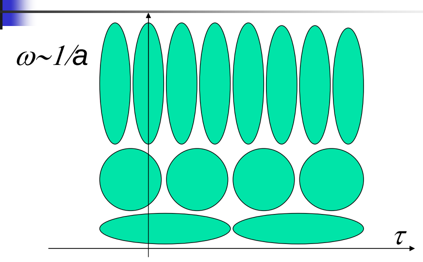
CWT, razlučivost

$$\boxed{t_c = at_\psi + \tau, \quad \omega_c = \frac{\omega_\Psi}{a}.} \qquad \boxed{\Delta_t = a\cdot\Delta_\psi, \quad \Delta_f = \frac{\Delta_\Psi}{a}.} \qquad \boxed{\Delta_t\cdot\Delta_f = const.}$$

- Centri koncentracije energije funkcija razlaganja u obje domene su linearno ovisni o pomaku τ i nelinearno ovisni o skali *a*.
- Efektivna širina funkcija razlaganja u obje domene je promjenjiva, ali je produkt širina konstantan i određen svojstvima otvora Ψ.

51

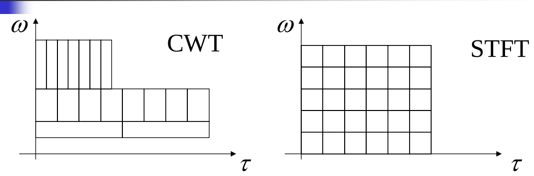
Razlučivost u T-F ravnini



- Središta elipsi predstavljaju centre funkcija razlaganja (τ, ω~1/a), a dimenzije efektivne širine.
- Svojstva, odnosno geometrija funkcija razlaganja u T-F ravnini je promjenjiva!!

52

Razlučivost: CWT i STFT

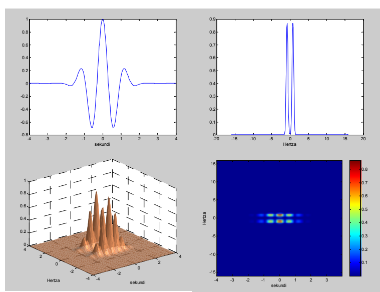


- STFT: konstantna rezolucija na cijeloj T-F ravnini.
- CWT:
  - finija rezolucija u frekvencijskoj domeni za NF,
  - finija rezolucija u vremenskoj domeni za VF.

53

Primjeri wavelet funkcija

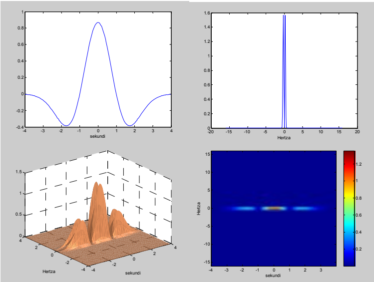
- Morlett: $\psi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}\cos 5t.$



54

Primjeri wavelet funkcija

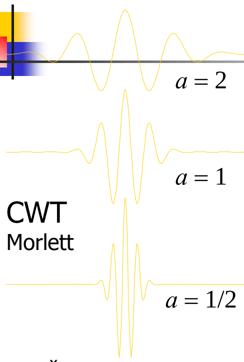
- Sombrero: $\psi(t)=C\left(1-t^2\right)e^{-\frac{t^2}{2}}.$

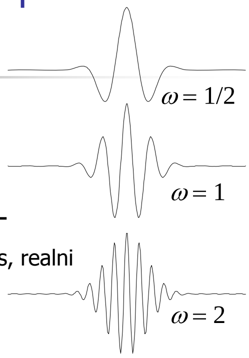


55

Usporedba CWT-STFT

- CWT
  Morlett
- STFT
  (Gauss, realni dio)



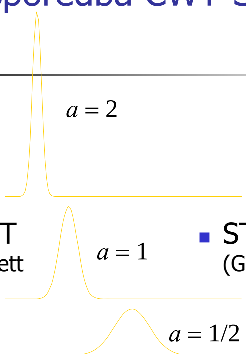


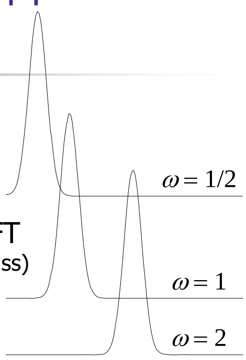
- Širina otvora se mijenja, broj valića isti.
- Širina otvora konstantna, broj valića se mijenja.

56

Usporedba CWT-STFT

- CWT
  Morlett
- STFT
  (Gauss)



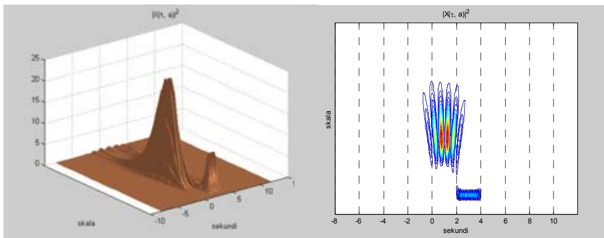


- Širina otvora se mijenja, produkt $\Delta_t\Delta_f$ je konstantan.
- Širina otvora konstantna.

57

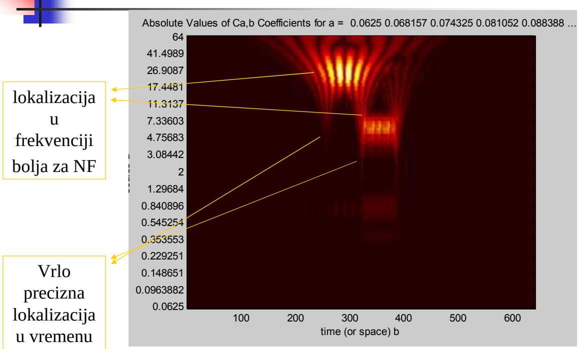
CWT na primjeru

- Analizirani signal: dva sinusa, Morletov wavelet. $\psi(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}\cos(5t)$



58

CWT na primjeru



59

CWT, inverzna formula

$$X(\tau,a)=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\,\psi^*\left(\frac{t-\tau}{a}\right)dt$$

- Analogijom pretpostavimo da postoji inverzna formula oblika:

$$x(t)=\frac{1}{\mathrm{C}}\int_{\tau=-\infty}^{+\infty}\int_{a=0}^{+\infty}X(\tau,a)\frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right)da\,d\tau$$

- gdje je C neka nepoznata konstanta.

60

CWT, inverzna formula

- Izvod je sličan ali složeniji od STFT-a, pa ga ovdje ne reproduciramo.
- Pokazuje se da nepoznata konstanta iznosi:

$$C = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{\omega} d\omega$$

- $\Psi(\omega)$ je Fourierova transformacija od $\psi(t)$.
- Uvjet prihvatljivosti funkcije ψ ujedno je i određen gornjim izrazom ($0 < C < \infty$).

61

CWT, inverzna formula

- Lako se vidi da je za konačan iznos:

$$C = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{\omega} d\omega$$

- nužno da je $\Psi(0) = 0$.
- Valić ne smije imati istosmjernu komponentu, odnosno:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)\, dt = 0.$$

62

CWT, transformacijski par

- Konačno imamo transformacijski par:

$$X(\tau,a) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, \psi^*\left(\frac{t-\tau}{a}\right) dt,$$

$$x(t) = \frac{1}{C} \int_\tau \int_a X(\tau,a) \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right) da\, d\tau;$$

- uz ($0 < C < \infty$):

$$C = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{\omega} d\omega, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)\, dt = 0.$$

63

Postupak računanja CWT

- A) U Fourierovoj domeni:

$$X(\tau,a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, \psi^*\left(\frac{t-\tau}{a}\right) dt,$$

$$X(\tau,a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\, \sqrt{a} \cdot \Psi(-a\omega)\, e^{-j\omega\tau} d\omega,$$

$$X(\tau,a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(-\omega) \cdot \Psi(a\omega)\, e^{j\omega\tau} d\omega,$$

- Dobiveni izraz je *Fourier*$^{-1}$[$X(-\omega)\Psi(a\omega)$].

64

Postupak računanja CWT

- B) Kao slog filtracija za različite skale a :

$$X(\tau,a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, \psi^*\left[-\frac{1}{a}(\tau - t)\right] dt,$$

- Za $a = 1$ važi:

$$X(\tau,1) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, \psi^*[-(\tau - t)] dt,$$

- Dobiveni izraz predstavlja konvolucijski integral funkcija $x(t)$ i $\psi^*(-t)$.

65

Postupak računanja CWT

- Konvolucija $x(t)$ i $\psi^*(-t)$ odgovara pojasnopropusnom filtriranju:

$$x \longrightarrow \boxed{\Psi^*(-\omega)} \longrightarrow X(\tau, 1)$$

- Za $a \neq 1$ imamo:

$$X(\tau,a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, \psi^*\left[-\frac{1}{a}(\tau - t)\right] dt,$$

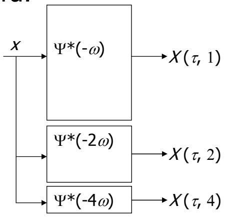
$$x \longrightarrow \boxed{\Psi^*(-a\omega)} \longrightarrow X(\tau, a)$$

- Pojasnopropusni filtar je promijenjene širine i središnje frekvencije.

66

CWT kao slog filtara

- Neka je a = 1, 2, 4, ...
- CWT možemo računati slogom nejednakih filtara:



Označimo središte pojasa sa ω_c i efektivnu širinu filtra sa Δ.

Središte pojasa je $\omega_c / 2$, a efektivna širina je $\Delta / 2$.

Središte pojasa je $\omega_c / 4$, a efektivna širina je $\Delta / 4$.

Diskretizacija WT

$$X(\tau,a)=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\,\psi^{*}\left(\frac{t-\tau}{a}\right)dt,$$

- Diskretizacija usklađena s razlučivošću:

$a=a_0^k$ - logaritamska podjela u skali (frekvenciji)

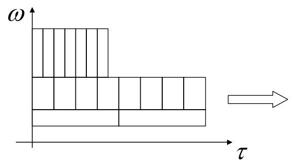
$\tau=mTa$ - pomak usklađen s iznosom skale

$tj.\ \tau=mTa_0^k$

Diskretizacija WT

Funkcije razlaganja $\psi_{m,k}(t)=\frac{1}{\sqrt{a_0^k}}\psi\left(\frac{t}{a_0^k}-mT\right)$

DWT $X[m,k]=\frac{1}{\sqrt{a_0^k}}\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\,\psi\left(\frac{t}{a_0^k}-mT\right)dt$



nejednolika kvantizacija T-F ravnine

Uvjet rekonstrukcije

$$x(t)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X[m,k]\cdot\psi_{m,k}(t)$$

- Rekonstrukcija je moguća i to na numerički stabilan način ako postoje dvije konstante A i B za koje vrijedi:

$$A\underbrace{\|x\|^2}_{energija\ signala}\le\underbrace{\sum_{m,k}\|X[m,k]\|^2}_{energija\ koeficijenata}\le B\underbrace{\|x\|^2}_{energija\ signala}$$

$$0<A\le B<\infty$$

- Kod DWT-a ne postoji ekvivalent nužnog uvjeta $T\Omega\le 2\pi$, koji je vrijedio za Gaborovu ekspanziju.

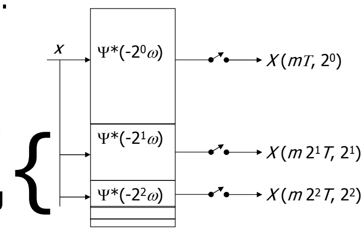
Oktavna DWT

- Kod waveleta se lako mogu pronaći ortogonalne baze s dobrim lokalizirajućim svojstvima u obje domene (što nije bio slučaj s Gaborom).
- Za realizaciju čest izbor je $a_0 = 2$ tj. oktavna podjela frekvencijske skale.
- Prednost: mogućnost brze realizacije filtarskim slogovima.

$$\psi_{m,k}(t)=\frac{1}{\sqrt{2^k}}\psi\left(\frac{t}{2^k}-mT\right)$$

Oktavna DWT kao slog filtara

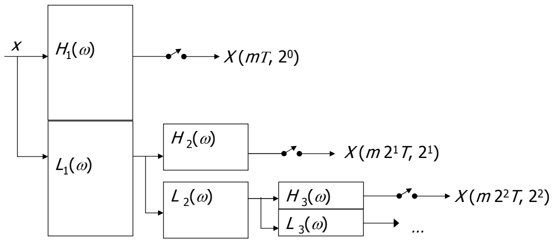
- Ponovno prikažimo CWT filtarski slog. Označimo a = $2^0, 2^1, 2^2$, … i otipkamo uzorke rezultata.
- Zbrojena širina svih filtara $j > k$ jednaka je širini k - tog filtra.



Problem: NP filtri vrlo visokog reda!

Oktavna DWT kao slog filtara

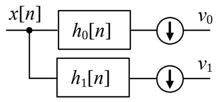
- Ideja za rekurzivnu realizaciju



Kaskadno realizirani filtri mogu biti značajno nižeg reda.

73

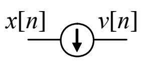
Filtarski slog s decimacijom



- Na prethodnom slajdu imali smo kontinuirane filtre.
- Ovdje imamo slog diskretnih filtara s decimacijom.
- Decimacija s faktorom 2 znači odbacivanje svakog drugog uzorka.
- Da li je potpuna rekonstrukcija moguća?
- Da li je moguće ovakav filtarski slog dovesti u vezu sa oktavnom DWT?

74

Decimator



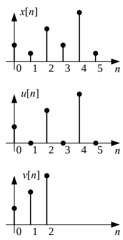
- U vremenskoj domeni: $v[n] = x[2n]$.
- Što imamo u frekvencijskoj domeni?
- Kreirajmo iz $x[n]$ pomoćni signal $u[n]$ takav da mu je svaki drugi uzorak nula:

$$u[n] = \begin{cases} x[n] & n \ \text{paran}, \\ 0 & n \ \text{neparan}. \end{cases}$$

75

Spektar decimiranog signala

$$u[n] = \begin{cases} x[n] & n \ \text{paran}, \\ 0 & n \ \text{neparan}. \end{cases}$$



- Spektar takvog signala je:

$$U\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n \ \text{paran}} x[n] \cdot e^{-j\omega n}$$

- Želimo zapisati sumu po svim n.
- Iskoristit ćemo činjenicu:

$$e^{-j\omega n} = \begin{cases} +e^{-j(\omega+\pi)n} & n \ \text{paran} \\ -e^{-j(\omega+\pi)n} & n \ \text{neparan} \end{cases}$$

76

Spektar decimiranog signala

$$\sum_{n \ \text{paran}} x[n] \cdot e^{-j\omega n} = \frac{1}{2}\sum_n x[n] \cdot e^{-j\omega n} + \frac{1}{2}\sum_n x[n] \cdot e^{-j(\omega+\pi)n}$$

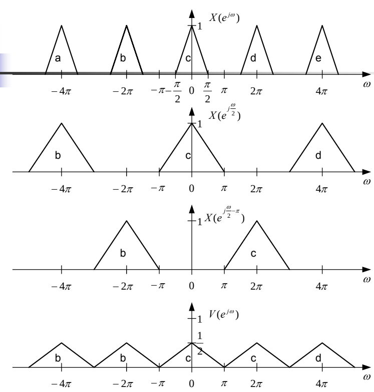
- Članovi uz neparne n se međusobno dokidaju.

$$U\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{2}\left[X\left(e^{j\omega}\right) + X\left(e^{j(\omega+\pi)}\right)\right]$$

- $v[n] = u[2n]$.
- Kako $u[n]$ sadrži samo parne uzorke, za spektre vrijedi $V(\omega) = U(\omega/2)$:

$$V\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{2}\left[X\left(e^{j\frac{\omega}{2}}\right) + X\left(e^{j\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)}\right)\right]$$

77



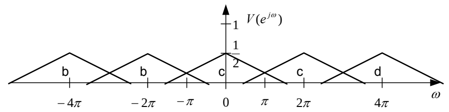
Spektar signala frekvencijski ograničenog na $\pm\pi/2$.

Spektar decimiranog signala.

78

Spektar decimiranog signala

- Da signal nije bio frekvencijski ograničen na $\pm\pi/2$, decimacija bi osim rastezanja uzrokovala i preklapanje spektara (*eng. aliasing*).



Decimirani signal u Z domeni

- Identičnim postupkom uz zamjenu $z = e^{j\omega}$ dobivamo sljedeće veze:

$$U(z)=\frac{1}{2}\left[X(z)+X\left(ze^{j\pi}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[X(z)+X(-z)\right]$$

$$V(z)=U\left(z^{\frac{1}{2}}\right),$$

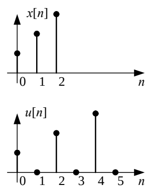
$$V(z)=\frac{1}{2}\left[X(z^{\frac{1}{2}})+X(-z^{\frac{1}{2}})\right]$$

Interpolator

$$x[n] \rightarrow \boxed{\uparrow} \rightarrow u[n]$$

- U vremenskoj domeni:

$$u[2n]=x[n],$$
$$u[2n+1]=0.$$



Interpolator

$$x[n] \rightarrow \boxed{\uparrow} \rightarrow u[n]$$

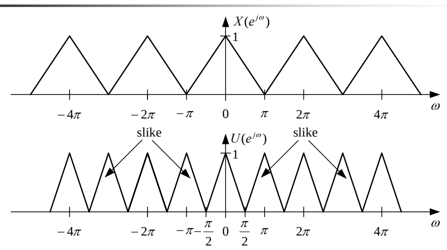
- U frekvencijskoj domeni:

Neparni uzorci su nula.

$$U(e^{j\omega})=\sum u[n]\cdot e^{-j\omega n}=\sum u[2n]\cdot e^{-j\omega 2n}$$
$$=\sum x[n]\cdot e^{-j\omega 2n}=X\left(e^{j2\omega}\right)$$

- Rezultat je stisnuti spektar: $U\left(e^{j\omega}\right)=X\left(e^{j2\omega}\right),$
- U Z-domeni: $U(z)=X\left(z^2\right).$

Interpolator



- Spektar interpoliranog signala se suzio, a period spektra interpoliranog signala je π (ne više 2π)!
- Imamo pojavu ponavljajućih "slika" spektra.

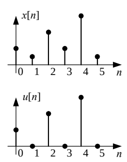
Decimator + interpolator

$$x[n] \rightarrow \boxed{\downarrow} \rightarrow \boxed{\uparrow} \rightarrow u[n]$$

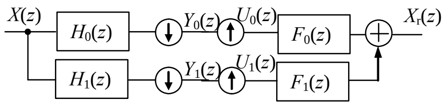
- U vremenskoj domeni: $u[n]=\begin{cases} x[n] & n \text{ paran,} \\ 0 & n \text{ neparan.} \end{cases}$
- Već smo pokazali da je spektar takvog signala:

$$U\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{2}\left[X\left(e^{j\omega}\right)+X\left(e^{j(\omega+\pi)}\right)\right],$$

$$U(z)=\frac{1}{2}\left[X(z)+X(-z)\right].$$



Filtarski slog s decimacijom i interpolacijom



$$F_0(z)\cdot\frac{1}{2}\left[H_0(z)X(z)+H_0(-z)X(-z)\right]+$$

$$F_1(z)\cdot\frac{1}{2}\left[H_1(z)X(z)+H_1(-z)X(-z)\right]=z^{-L}X(z)$$

- Ideja: neka se aliasing komponente (komponente koje su posljedica decimacije i interpolacije) međusobno poništavaju.

85

Potpuna rekonstrukcija

- Uvjet potpune rekonstrukcije možemo razdvojiti na dva dijela. Prvi je:

$$F_0(z)\cdot\frac{1}{2}\left[H_0(-z)X(-z)\right]+F_1(z)\cdot\frac{1}{2}\left[H_1(-z)X(-z)\right]=0$$

$$F_0(z)\cdot H_0(-z)+F_1(z)\cdot H_1(-z)=0$$

- Aliasing komponente iz dva filtra moraju biti istog iznosa i suprotnog predznaka. Nadalje:

$$F_0(z)\cdot\frac{1}{2}\left[H_0(z)X(z)\right]+F_1(z)\cdot\frac{1}{2}\left[H_1(z)X(z)\right]=z^{-L}X(z)$$

$$F_0(z)\cdot H_0(z)+F_1(z)\cdot H_1(z)=2z^{-L}$$

86

Uvjeti potpune rekonstrukcije

- Uvjet rekonstrukcije bez izobličenja:

$$F_0(z)\cdot H_0(z)+F_1(z)\cdot H_1(z)=2z^{-L}$$

- Uvjet poništenja aliasinga:

$$F_0(z)\cdot H_0(-z)+F_1(z)\cdot H_1(-z)=0$$

- Problem je, naravno, pronaći četvorku filtara željenih frekvencijskih karakteristika koji potpuno ili aproksimativno zadovoljavaju ova dva uvjeta.

87

Uvjeti PR u matričnoj formi

$$\begin{bmatrix}F_0(z) & F_1(z)\end{bmatrix}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}H_0(z) & H_0(-z)\\ H_1(z) & H_1(-z)\end{bmatrix}}_{\mathbf{H}_m(z)}=\begin{bmatrix}2z^{-L} & 0\end{bmatrix}$$

- Matrica H_m naziva se još i analizirajuća modulacijska matrica.
- Nadopunimo li matricu F još jednim retkom, uz supstituciju $z\rightarrow -z$ dobivamo još jedan poznati oblik PR uvjeta u matričnoj formi.

88

Uvjeti PR u matričnoj formi

$$\underbrace{\begin{bmatrix}F_0(z) & F_1(z)\\ F_0(-z) & F_1(-z)\end{bmatrix}}_{\mathbf{F}_m(z)}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}H_0(z) & H_0(-z)\\ H_1(z) & H_1(-z)\end{bmatrix}}_{\mathbf{H}_m(z)}=\begin{bmatrix}2z^{-L} & 0\\ 0 & 2(-z)^{-L}\end{bmatrix}$$

- Matrica F_m naziva se još i sintetizirajuća modulacijska matrica.
- Kraće zapisan uvjet potpune rekonstrukcije uz korištenje modulacijskih matrica i L=0 glasi:

$$\mathbf{F}_m(z)\cdot\mathbf{H}_m(z)=2\cdot\mathbf{I}$$

- Takav filtarski slog nazivamo biortogonalnim.

89

Potpuna rekonstrukcija u matričnoj formi

- Jednadžbe filtarskog sloga izražene pomoću modulacijske matrice:

$$\begin{bmatrix}U_0(z)\\ U_1(z)\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}H_0(z) & H_0(-z)\\ H_1(z) & H_1(-z)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X(z)\\ X(-z)\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}Y_0(z)\\ Y_1(z)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}U_0(z^{\frac{1}{2}})\\ U_1(z^{\frac{1}{2}})\end{bmatrix}$$

$$X_r(z)=z^{-L}X(z)=\begin{bmatrix}F_0(z) & F_1(z)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}U_0(z)\\ U_1(z)\end{bmatrix}$$

90

Dizajn filtara

- Kako dizajnirati četvorku filtara H_0, F_0, H_1, F_1?
- Prijedlog: za poništenje *aliasinga* odabrati:

$$F_0(z) = H_1(-z), \qquad F_1(z) = -H_0(-z)$$

- Očito, uvjet poništenja *aliasinga* je zadovoljen:

$$F_0(z)\cdot H_0(-z) + F_1(z)\cdot H_1(-z) = 0$$
$$H_1(-z)\cdot H_0(-z) - H_0(-z)\cdot H_1(-z) = 0$$

- Kako izgleda isti izbor u vremenskoj domeni?

91

Dizajn filtara: poništenje *aliasinga*

$$F_0(z) = H_1(-z), \qquad F_1(z) = -H_0(-z);$$
$$f_0[n] = (-1)^n \cdot h_1[n], \qquad f_1[n] = -(-1)^n h_0[n].$$

- Pretpostavimo da se radi o filtrima s konačnim impulsnim odzivom.
- Naš izbor daje rješenje s alternirajućim predznacima impulsnog odziva:

h_0	a, b, c	p, -q, r, -s, t	f_0
h_1	p, q, r, s, t	-a, b, -c	f_1

92

Dizajn filtara: rekonstrukcija bez izobličenja

- Treba provjeriti i uvjet rekonstrukcije bez izobličenja:

$$F_0(z)\cdot H_0(z) + F_1(z)\cdot H_1(z) = 2z^{-L}$$

- U svakom od pribrojnika javlja se produkt filtara. Označimo "produkt filtre":

$$P_0(z) = F_0(z)\cdot H_0(z), \qquad P_1(z) = F_1(z)\cdot H_1(z).$$

- P_0 je niskopropusni, a P_1 visokopropusni produkt filtar.

93

Dizajn filtara: rekonstrukcija bez izobličenja

- Uz naš izbor vrijedi:

$$P_1(z) = F_1(z)\cdot H_1(z) = -H_0(-z)\cdot H_1(z) = -H_0(-z)\cdot F_0(-z),$$
$$P_1(z) = -P_0(-z).$$

- Uvjet rekonstrukcije bez izobličenja tad glasi:

$$F_0(z)\cdot H_0(z) - F_0(-z)\cdot H_0(-z) = P_0(z) - P_0(-z) = 2z^{-L}$$

- Konačno, recept se sastoji od dva koraka:
  - dizajn NP filtra P_0 koji zadovoljava gornji uvjet,
  - faktorizacija P_0 u F_0H_0. Izračunavanje F_1 i H_1.

94

Dizajn NP filtra P_0

$$P_0(z) = F_0(z)\cdot H_0(z), \qquad P_0(z) - P_0(-z) = 2z^{-L}.$$

- Red filtra P_0 određuje sumu redova filtara F_0 i H_0.
- Ako se radi o FIR filtrima, dužina impulsnog odziva P_0 je zadana sumom dužina F_0 i H_0.
- Postoje brojni načini za dizajn P_0.
- Uočimo važno svojstvo $P_0(z)$: sve neparne potencije od z imaju koeficijente jednake nuli, osim uz z^{-L} gdje je koeficijent jednak jedan.

95

Dizajn NP filtra P_0

- Napravit ćemo primjer.
- Neka je P_0 FIR filtar dužine 6.

$$P_0(z) = p_0[0] + p_0[1]z^{-1} + p_0[2]z^{-2} + p_0[3]z^{-3} + p_0[4]z^{-4} + p_0[5]z^{-5}$$
$$P_0(-z) = p_0[0] - p_0[1]z^{-1} + p_0[2]z^{-2} - p_0[3]z^{-3} + p_0[4]z^{-4} - p_0[5]z^{-5}$$
$$P_0(z) - P_0(-z) = 0 + 2p_0[1]z^{-1} + 0 + 2p_0[3]z^{-3} + 0 + 2p_0[5]z^{-5} = 2z^{-L}$$

- Uz L=3, slijedi:

$$p_0[1] = 0, \quad p_0[3] = 1, \quad p_0[5] = 0.$$

96

Dizajn NP filtra P_0

- Očito, parne potencije nedostaju u izrazu $P_0(z)-P_0(-z)$; znači, radi se o neparnoj funkciji.
- Očito, L je neparan.
- Zgodniji oblik možemo dobiti ako normiramo (pomnožimo) $P_0(z)$ sa z^L kako bi ga centrirali:

$$P(z)=z^L P_0(z),$$
$$P(-z)=(-z)^L P_0(-z) \;=-z^L P_0(-z),$$

- jer je L neparan.

97

Polupojasni filtar

- Konačno, uvjet PR glasi:

$$P(z)+P(-z)=2.$$

- Takav P se naziva "polupojasnim filtrom".
- Sve parne potencije u $P(z)$ su jednake nuli, osim konstantnog člana koji je jednak 1.
- Koeficijenti uz neparne potencije $P(z)$ su varijable dizajna decimiranog filtarskog sloga s dva pojasa i potpunom rekonstrukcijom.

98

Primjer $P_0(z)$

- Jedan (dobar) izbor za $P_0(z)$ je:

$$P_0(z)=\left(1+z^{-1}\right)^{2p} Q_{2p-2}(z).$$

- Prvi član osigurava nultočku višestrukosti $2p$ na frekvenciji $\omega=\pi$.
- Drugi član je polinom takav da vrijedi PR uvjet.
- Ako je polinom reda $2p-2$, pokazuje se da je $Q(z)$ jednoznačan.
- Takav filtar nazivamo binomnim ili maksimalno glatkim (*eng. binomial, maxflat*).

99

Primjer $P_0(z)$

- Za $p=1$ imamo:

$$P_0(z)=\left(1+z^{-1}\right)^2\cdot q_0$$

- Polinom $Q(z)$ je reda $2\cdot 1-2=0$.

$$P_0(z)=\left(1+2z^{-1}+z^{-2}\right)\cdot q_0$$
$$P_0(z)-P_0(-z)=\left[\left(1+2z^{-1}+z^{-2}\right)-\left(1-2z^{-1}+z^{-2}\right)\right]\cdot q_0,$$
$$P_0(z)-P_0(-z)=\;4z^{-1}q_0=2z^{-L},$$
$$L=1,\quad q_0=1/2.$$
$$P(z)=z^1\cdot P_0(z)\;=\frac{z}{2}+1+\frac{z^{-1}}{2}.$$

100

Primjer $P_0(z)$

- Faktorizacija P_0 u F_0H_0 ima više varijanti:

$$H_0(z)=1/2 \qquad F_0(z)=\left(1+z^{-1}\right)^2$$
$$H_0(z)=\left(1+z^{-1}\right)/\sqrt{2} \qquad F_0(z)=\left(1+z^{-1}\right)/\sqrt{2}$$
$$H_0(z)=\left(1+z^{-1}\right)^2 \qquad F_0(z)=1/2$$

- Za primjene je posebno zanimljiv srednji izbor.
- Takvim se filtarskim slogom realizira Haarova DWT.

101

Primjer $P_0(z)$

- Vrlo ilustrativan je slučaj $p=2$:

$$P_0(z)=\left(1+z^{-1}\right)^4\left(q_0+q_1z^{-1}+q_2z^{-2}\right),$$
$$P_0(z)=\left(1+4z^{-1}+6z^{-2}+4z^{-3}+z^{-4}\right)\left(q_0+q_1z^{-1}+q_2z^{-2}\right).$$

- Za centriranje množimo sa z^3:

$$P(z)=\left(1+4z^{-1}+6z^{-2}+4z^{-3}+z^{-4}\right)\left(q_0+q_1z^{-1}+q_2z^{-2}\right)z^3,$$
$$P(z)=q_0z^3+(4q_0+q_1)z^2+(6q_0+4q_1+q_2)z$$
$$+4q_0+6q_1+4q_2$$
$$+(q_0+4q_1+6q_2)z^{-1}+(q_1+4q_2)z^{-2}+q_2z^{-3}.$$

102

Primjer $P_0(z)$

- Članovi uz parne potencije moraju biti nula, a konstantni član mora biti jedan.
- To daje 3 jednadžbe s 3 nepoznanice:

$$4q_0 + q_1 = 0,$$
$$4q_0 + 6q_1 + 4q_2 = 1,$$
$$q_1 + 4q_2 = 0.$$

- a rješenje je: $q_0 = -\frac{1}{16}, q_1 = \frac{1}{4}, q_2 = \frac{1}{16}.$

$$P_0(z) = \frac{1}{16}\left(1+z^{-1}\right)^4\left(-1+4z^{-1}-z^{-2}\right),$$
$$= \frac{1}{16}\left(1+z^{-1}\right)^4\left(c-z^{-1}\right)\left(-c^{-1}+z^{-1}\right), \quad c = 2-\sqrt{3}.$$

103

Faktorizacija $P_0(z)$

- Za F_0 ili H_0 (u bilo kojem redoslijedu) biramo:

1		red = 0
$\left(1+z^{-1}\right)$		red = 1
$\left(1+z^{-1}\right)^2$ ili	$\left(1+z^{-1}\right)\left(c-z^{-1}\right)$	red = 2
$\left(1+z^{-1}\right)^3$ ili	$\left(1+z^{-1}\right)^2\left(c-z^{-1}\right)$	red = 3

- Svaka od faktorizacija ima svojstva pogodna za određenu primjenu.
- Izbori faktora koji ne sadrže $(c\text{-}z^{-1})$ daju simetrične filtre: filtre s linearnom fazom.

104