

Spektralne karakteristike slučajnih procesa

Prof. dr. sc. Hrvoje Babić
 Doc. dr. sc. Damir Seršić
<http://ts.zesoi.fer.hr>

Spektar signala

- Fourierova transformacija: $x(t) \rightarrow X(\omega)$.

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} dt$$

Fourierova transformacija

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

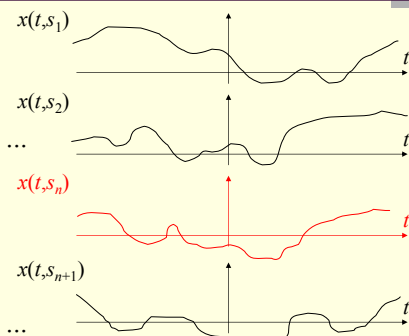
- Dovoljni (ne i nužni) uvjeti za postojanje $X(\omega)$ su:
 - Dirichletovi uvjeti – $x(t)$ je ograničena konačnim brojem maksimuma i minimuma te konačnim brojem diskontinuiteta na bilo kojem konačnom intervalu od t .
 - apsolutna integrabilnost $x(t)$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty.$$

Spektar signala

- Fourierova transformacija je uobičajena mjera frekvencijskog sadržaja determinističkih signala.
- Neprikladna mjera za slučajne procese: ne mora postojati za sve realizacije.
- U nastavku ćemo opisati prikladniju mjeru frekvencijskog sadržaja slučajnog procesa: **gustoću spektra snage**.

Slučajni proces $X(t, s)$



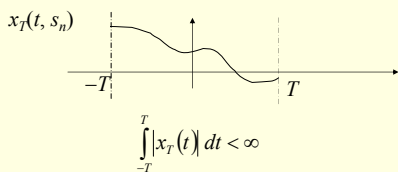
Spektar signala

- Realizacija beskonačnog trajanja: najčešće Fourierov integral divergira.
- Uzmemo konačni segment $[-T, T]$ jedne realizacije:

The diagram shows a finite segment of a realization $x(t, s_n)$ over the interval $[-T, T]$. The function is zero outside this interval.

$$x_T(t, s_n) = \begin{cases} x(t, s_n) & -T < t < T \\ 0 & \text{drugdje} \end{cases}$$

Spektar signala



■ T – konačan \Rightarrow možemo pretpostaviti apsolutnu konvergenciju.

■ Fourierov spektar tada postoji:

$$X_T(\omega) = \int_{-T}^T x_T(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Energija i snaga signala

■ Energija u intervalu $(-T, T)$:

$$\mathcal{E}(T) = \int_{-T}^T x_T^2(t) dt = \int_{-T}^T x^2(t) dt.$$

• Snaga:

$$P(T) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt$$

= energija u jedinici vremena.

• Fourierov spektar $X_T(\omega)$ postoji, pa možemo koristiti Parsevalov teorem.

Snaga signala

■ Parsevalov teorem za energije:

$$\mathcal{E}(T) = \int_{-T}^T x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X_T(\omega)|^2 d\omega.$$

• Snaga = energija / vrijeme:

$$P(T) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{|X_T(\omega)|^2}{2T}}_{\text{gustoca sp. snage}} d\omega.$$

• Veći $T \Rightarrow$ točniji izraz za snagu **jedne realizacije** $x(t, s_n)$ slučajnog procesa $X(t, s)$.

Srednja snaga slučajnog procesa

■ Kako prijeći od jedne realizacije $x(t, s_n)$ do slučajnog procesa $X(t, s)$?

■ $P(T)$ je slučajna varijabla.

■ Primijenimo operator očekivanja da dobijemo srednju snagu i formirajmo limes $T \rightarrow \infty$:

$$P_{XX} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E[X^2(t)] dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[|X_T(\omega)|^2]}{2T} d\omega.$$

= **srednja snaga slučajnog procesa** $X(t, s)$.

Srednja snaga slučajnog procesa

■ Srednja snaga procesa $X(t)$ je dana vremenskom srednjom vrijednošću $A\{\cdot\}$ drugog momenta:

$$P_{XX} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E[X^2(t)] dt = A\{E[X^2(t)]\}.$$

• Za stacionarni proces:

$$P_{XX} = E[X^2(t)] = \overline{X^2} = \text{konst.}$$

Gustoća spektra snage

■ Parsevalov teorem nam je dao izraz:

$$P_{XX} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[|X_T(\omega)|^2]}{2T} d\omega.$$

• S druge strane, srednja snaga procesa može se izračunati integracijom gustoće spektra snage:

$$P_{XX} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega) d\omega,$$

$$S_{XX}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[|X_T(\omega)|^2]}{2T}.$$

Gustoća spektra snage

- Dobiveni izraz:

$$S_{XX}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[|X_T(\omega)|^2]}{2T}$$

- je važan rezultat kojim definiramo **gustoću spektra snage** (eng. *power density spectrum*) slučajnog procesa.
- $S_{XX}(\omega)$ je mjera srednjeg frekvencijskog sadržaja snage slučajnog procesa.
- Kraći naziv: **spektar snage**.

Svojstva gustoće spektra snage

- 1.) $S_{XX}(\omega) \geq 0$,
- 2.) $S_{XX}(-\omega) = S_{XX}(\omega)$ za realne procese,
- 3.) $S_{XX}(\omega)$ je uvijek realan,
- 4.) $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega) d\omega = A\{E[X^2(t)]\} = P_{XX}$,
- 5.) $S_{\dot{X}\dot{X}}(\omega) = \omega^2 S_{XX}(\omega)$, $\dot{X}\dot{X} = \frac{dX(t)}{dt}$,
- 6.) Spektar snage i autokorelacijska funkcija su povezani: posebno poglavlje u nastavku.

Širina gustoće spektra snage

- Za niskopropusni slučajni proces jedna mjera širine oko $\omega = 0$ je drugi moment spektra snage, tj. varijanca.
- Efektivna širina pojasa (eng. *RMS bandwidth*) NP procesa definirana je kao normirana varijanca:

$$W_{RMS}^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_{XX}(\omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega) d\omega}$$

Širina gustoće spektra snage

- Za pojasnopropusni slučajni proces efektivna širina se mjeri oko središta pojasa ω_0 :

$$\omega_0 = \frac{\int_0^{\infty} \omega S_{XX}(\omega) d\omega}{\int_0^{\infty} S_{XX}(\omega) d\omega}, \quad W_{RMS}^2 = \frac{4 \int_0^{\infty} (\omega - \omega_0)^2 S_{XX}(\omega) d\omega}{\int_0^{\infty} S_{XX}(\omega) d\omega}$$

Autokorelacija - spektar snage

$$\begin{aligned} S_{XX}(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[X_T^*(\omega) \cdot X_T(\omega)]}{2T} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} E\left[\frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t_1) e^{j\omega t_1} dt_1 \cdot \int_{-T}^T X(t_2) e^{-j\omega t_2} dt_2\right] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{-T}^T \underbrace{E[X(t_1) X(t_2)]}_{R_{XX}(t_1, t_2)} e^{-j\omega(t_2 - t_1)} dt_2 dt_1 \end{aligned}$$

- $R_{XX}(t_1, t_2)$ – autokorelacijska funkcija procesa $X(t)$.

Autokorelacija - spektar snage

- Uz supstituciju $t = t_1$ i $\tau = t_2 - t_1$ izlazi:

$$S_{XX}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T-t} \int_{-T}^T R_{XX}(t, t+\tau) dt e^{-j\omega\tau} d\tau$$

- Provedemo limes za vanjski integral:

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T R_{XX}(t, t+\tau) dt}_{\text{vremenska srednja vrijednost autokorelacijske funkcije procesa } X(t)} e^{-j\omega\tau} d\tau$$

vremenska srednja vrijednost autokorelacijske funkcije procesa $X(t)$.

Autokorelacija - spektar snage

$$S_{XX}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A[R_{XX}(t, t+\tau)] e^{-j\omega\tau} d\tau$$

- $S_{XX}(\omega)$ i $A[R_{XX}(t, t+\tau)]$ sačinjavaju **Fourierov transformacijski par**:
 $S_{XX}(\omega) \leftrightarrow A[R_{XX}(t, t+\tau)]$.
- Za $X(t)$ stacionaran u širem smislu vrijedi:
 $A[R_{XX}(t, t+\tau)] = R_{XX}(\tau)$.
- => AKF nije funkcija vremena, već samo pomaka τ .

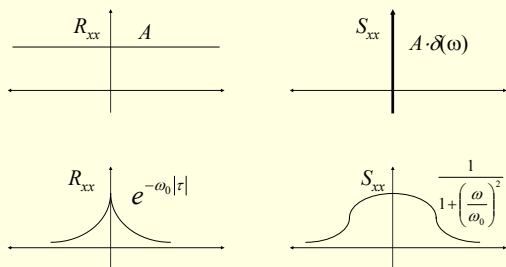
Wiener-Khinchinove relacije

$$S_{XX}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$R_{XX}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

- Veze autokorelacijske funkcije i spektra snage **stacionarnog** slučajnog procesa.

Wiener-Khinchinove relacije



Kroskorelacija – spektralna gustoća međusnage

- Neka je proces $W(t) = X(t) + Y(t)$.
- Autokorelacija $R_{WW}(t, t+\tau) = E[W(t)W(t+\tau)] = E\{[X(t)+Y(t)] \cdot [X(t+\tau)+Y(t+\tau)]\} = R_{XX}(t, t+\tau) + R_{YY}(t, t+\tau) + R_{XY}(t, t+\tau) + R_{YX}(t, t+\tau)$.
- Napravimo vremensku srednju vrijednost $A[\cdot]$ i uradimo Fourierovu transformaciju:
- $S_{WW}(\omega) = S_{XX}(\omega) + S_{YY}(\omega) + S_{XY}(\omega) + S_{YX}(\omega)$.
- Dva nova člana $S_{XY}(\omega)$ i $S_{YX}(\omega)$ su **spektri međusnage** (engl. cross-spectra).

Kroskorelacija – spektralna gustoća međusnage

- Mogu se dobiti iz Fourierovog spektra konačnog segmenta jedne realizacije:

$$x_T(t) \rightarrow X_T(\omega),$$

$$y_T(t) \rightarrow Y_T(\omega).$$

- Međusnaga dva signala:

$$P_{XY}(T) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x_T(t) y_T(t) dt$$

- Parsevalov teorem daje:

$$P_{XY}(T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X_T^*(\omega) Y_T(\omega)}{2T} d\omega$$

Kroskorelacija – spektralna gustoća međusnage

- Srednja vrijednost preko svih realizacija:

$$\bar{P}_{XY}(T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E[X_T^*(\omega) Y_T(\omega)]}{2T} d\omega$$

- Za $T \rightarrow \infty$:

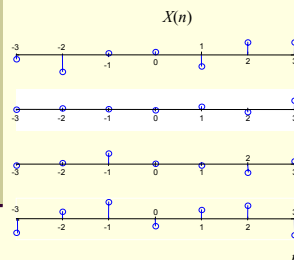
$$\bar{P}_{XY} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[X_T^*(\omega) Y_T(\omega)]}{2T}}_{S_{XY}(\omega)} d\omega$$

$$\bar{P}_{XY} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{XY}(\omega) d\omega \quad \bullet \text{ Analogno za } P_{YX}$$

Svojstva spektra međusnage

- $S_{XY}(\omega) = S_{YX}(-\omega) = S_{YX}^*(\omega)$,
- $\text{Re}[S_{XY}(\omega)]$ i $\text{Re}[S_{YX}(\omega)]$ – parne funkcije,
- $\text{Im}[S_{XY}(\omega)]$ i $\text{Im}[S_{YX}(\omega)]$ – neparne funkcije,
- $S_{XY}(\omega) = 0$ i $S_{YX}(\omega) = 0$ ako su $X(t)$ i $Y(t)$ ortogonalni.
- Nekorelirani $X(t)$ i $Y(t)$ s konstantnom srednjom vrijednosti $\Rightarrow S_{XY}(\omega) = S_{YX}(\omega) = 2\pi \overline{XY} \delta(\omega)$.
- $A[R_{XY}(t, t+\tau)] \rightarrow S_{XY}(\omega)$ i $A[R_{YX}(t, t+\tau)] \rightarrow S_{YX}(\omega)$ tj. srednja kroskorelacijska funkcija i spektar međusnage čine **Fourierov transformacijski par**,
- za zajednički stacionarne procese vrijedi:
 $R_{XY}(\tau) \rightarrow S_{XY}(\omega)$ i $R_{YX}(\tau) \rightarrow S_{YX}(\omega)$.

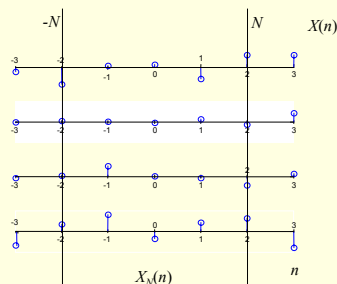
Vremenski diskretan slučajni proces



- VDSP: $X(n), n \in \mathbb{Z}$.
- Očekivana vrijednost: $E[X(n)]$.
- AKF: $R_{XX}(n, n+k) = E[X(n)X(n+k)]$.
- Vremenska srednja vrijednost:

$$A[\cdot] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^N \cdot$$

Vremenski diskretan slučajni proces



- $X_N(n)$ – konačan segment $[-N, N]$ slučajnog procesa.

Gustoća spektra snage vremenski diskretnih slučajnih procesa

$$\begin{aligned} S_{XX}(e^{j\omega}) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{E[X_N^* X_N]}{2N+1} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{2N+1} \sum_{n_1=-N}^N X(n_1) e^{j\omega n_1} \cdot \sum_{n_2=-N}^N X(n_2) e^{-j\omega n_2} \right\} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n_1=-N}^N \sum_{n_2=-N}^N \underbrace{E[X(n_1)X(n_2)]}_{R_{XX}(n_1, n_2)} \cdot e^{j\omega(n_1-n_2)} \end{aligned}$$

- $R_{XX}(n_1, n_2)$ je autokorelacija diskretnog procesa $X(n)$.
- Supstituiramo $n = n_1$ i $k = n_2 - n_1$, pa slijedi...

Gustoća spektra snage vremenski diskretnih slučajnih procesa

$$S_{XX}(e^{j\omega}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-N-n}^{N-n} \sum_{-N}^N R_{XX}(n, n+k) \cdot e^{-j\omega k}$$

- Za $N \rightarrow \infty$

$$S_{XX}(e^{j\omega}) = \sum_{-\infty}^{\infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^N R_{XX}(n, n+k) \cdot e^{-j\omega k}$$

vremenska srednja vrijednost AKF procesa $X(n)$

$$S_{XX}(e^{j\omega}) = \sum_{-\infty}^{\infty} A[R_{XX}(n, n+k)] \cdot e^{-j\omega k}$$

- Veza $S_{XX}(e^{j\omega})$ i $A[R_{XX}(n, n+k)]$: DTFT.

Gustoća spektra snage vremenski diskretnih slučajnih procesa

- Za stacionarne procese:

$$S_{XX}(e^{j\omega}) = \sum_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(k) \cdot e^{-j\omega k}$$

$$R_{XX}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{XX}(e^{j\omega}) e^{j\omega k} d\omega$$

- Wiener – Khinchinove relacije za vremenski diskretne slučajne procese.

- Srednja snaga:

$$P_{XX} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^N E[X^2(n)] \quad P_{XX} = A\{E[X^2(n)]\}$$

Gustoća spektra snage vremenski diskretnih slučajnih procesa

- Srednja snaga P_{XX} integriranjem gustoće spektra:

$$P_{XX} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{XX}(e^{j\omega}) d\omega$$

$$S_{XX}(e^{j\omega}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{E[|X_N(e^{j\omega})|^2]}{2N+1}$$

Slučajni proces u linearnom sustavu

Prof. dr. sc. Hrvoje Babić
 Doc. dr. sc. Damir Seršić
<http://ts.zesoi.fer.hr>

Odziv linearnog sustava

- Opći linearni sustav zadajemo kao:

$$y(t) = \mathbf{H}[x(t)],$$

- gdje je \mathbf{H} linearni operator koji predstavlja djelovanje sustava na $x(t)$.
- Za svaki signal $x(t)$ po definiciji vrijedi:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\xi) \cdot \delta(t - \xi) d\xi.$$

Odziv linearnog sustava

- Supstitucijom slijedi:

$$\begin{aligned} y(t) = \mathbf{H}[x(t)] &= \mathbf{H} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\xi) \cdot \delta(t - \xi) d\xi \right], \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\xi) \cdot \mathbf{H}[\delta(t - \xi)] d\xi. \end{aligned}$$

- Definiramo novu funkciju $h(t, \xi)$ – impulsni odziv linearnog sustava:

$$\mathbf{H}[\delta(t - \xi)] = h(t, \xi).$$

Odziv vremenski stalnog linearnog sustava

- Konačno, za odziv linearnog sustava dobivamo:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\xi) \cdot h(t, \xi) d\xi.$$

- Ako je sustav neovisan (invarijantan) o vremenu:

$$h(t, \xi) = h(t - \xi),$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\xi) \cdot h(t - \xi) d\xi. \rightarrow \text{konvolucijski integral}$$

- Kraće označeno: $y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$.

Odziv linearnog sustava u frekvencijskoj domeni

- Primijenimo *Fourierovu* transformaciju na $y(t)$:

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\xi) \cdot h(t - \xi) d\xi \right] \cdot e^{-j\omega t} dt, \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\xi) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \xi) e^{-j\omega(t - \xi)} dt \right] \cdot e^{-j\omega\xi} d\xi, \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\xi) H(\omega) \cdot e^{-j\omega\xi} d\xi = H(\omega) \cdot X(\omega). \end{aligned}$$

- $H(\omega)$ nazivamo prijenosnom funkcijom sustava.

Kauzalnost i stabilnost sustava

- Linearan vremenski stalan (LVS) sustav je kauzalan ako se ne odaziva prije nego što je pristigla pobuda.
- Matematički izražen uvjet kauzalnosti glasi:
 - $y(t) = 0$ za $t < t_0$ ako je $x(t) = 0$ za $t < t_0$,
 - Za LVS sustav slijedi: $h(t) = 0$ za $t < 0$.
- Sustav je stabilan ako je odziv na bilo koju ograničenu pobudu ograničen: $|x(t)| < M \rightarrow |y(t)| < M \cdot I$ (M i I su konstante).
- Za LVS sustav slijedi:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < \infty.$$

Slučajni proces u linearnom sustavu

- Promatramo odziv **stabilnog, linearnog i vremenski stalnog sustava** na jednu realizaciju $x(t)$ slučajnog procesa $X(t)$.
- I kada je $x(t)$ slučajan signal, također vrijedi:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\xi) \cdot h(t - \xi) d\xi, \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi) \cdot x(t - \xi) d\xi. \end{aligned}$$

Slučajni proces u linearnom sustavu

- Djelovanje linearnog sustava na jednu realizaciju $x(t)$ slučajnog procesa $X(t)$ rezultira signalom $y(t)$ kojeg možemo smatrati realizacijom nekog novog slučajnog procesa $Y(t)$.
- Definiramo slučajni proces:

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi) \cdot X(t - \xi) d\xi$$

- kao novi slučajni proces koji nastaje djelovanjem linearnog sustava H na sve realizacije ulaznog procesa $X(t)$.

Srednja vrijednost odziva

- Ako je ulazni slučajni proces $X(t)$ stacionaran u širem smislu vrijedi:

$$E[Y(t)] = E \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi) \cdot X(t - \xi) d\xi \right].$$

- Mi ćemo pretpostaviti da operator očekivanja E i integral mogu zamijeniti mjesta kad god to zatrebamo (dokaz i uvjeti *Cooper & McGillem* 1986.).

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi) \cdot E[X(t - \xi)] d\xi.$$

Srednja vrijednost odziva

$$E[Y(t)] = \bar{X} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi) d\xi = \bar{Y}. \rightarrow \text{konstanta.}$$

- Srednja vrijednost $Y(t)$ jednaka je srednjoj vrijednosti $X(t)$ pomnoženoj s površinom ispod impulsnog odziva sustava, ako je $X(t)$ stacionaran u širem smislu.

Srednja kvadratna vrijednost odziva

$$\begin{aligned} E[Y^2(t)] &= E \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi_1) \cdot X(t - \xi_1) d\xi_1 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi_2) \cdot X(t - \xi_2) d\xi_2 \right], \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E[X(t - \xi_1) X(t - \xi_2)] h(\xi_1) h(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \end{aligned}$$

- Ako je ulazni slučajni proces $X(t)$ stacionaran u širem smislu vrijedi:

$$E[X(t - \xi_1) X(t - \xi_2)] = R_{XX}(\xi_1 - \xi_2),$$

- odnosno autokorelacija nije funkcija vremena.

Srednja kvadratna vrijednost odziva

- Stoga niti naš rezultat nije ovisan o vremenu:

$$E[Y^2(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(\xi_1 - \xi_2) h(\xi_1) h(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = \overline{Y^2}.$$

- Izraz u većini slučajeva nije jednostavno izračunati.
- Mi ćemo riješiti jednostavan primjer.

Srednja kvadratna vrijednost odziva - primjer

- Tražimo srednju kvadratnu vrijednost izlaza, ako je na ulazu u sustav bijeli šum:

$$R_{XX}(\xi_1 - \xi_2) = \frac{N_0}{2} \delta(\xi_1 - \xi_2),$$

- gdje je N_0 pozitivna realna konstanta.
- Slijedi:

$$\overline{Y^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N_0}{2} \delta(\xi_1 - \xi_2) h(\xi_1) h(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2.$$

Srednja kvadratna vrijednost odziva - primjer

- Integriramo najprije po ξ_1 :

$$\overline{Y^2} = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi_2) \cdot h(\xi_2) d\xi_2,$$

- jer integral $\delta(\xi_1 - \xi_2) h(\xi_1) d\xi_1$ iznosi $h(\xi_2)$.
- Konačno:

$$\overline{Y^2} = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} h^2(\xi) d\xi.$$

- U našem slučaju, izlazna snaga proporcionalna je površini ispod kvadrata impulsnog odziva.

Autokorelacijska funkcija odziva

- Neka je $X(t)$ stacionaran u širem smislu.

$$R_{YY}(t, t + \tau) = E[Y(t)Y(t + \tau)],$$

$$= E \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi_1) \cdot X(t - \xi_1) d\xi_1 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi_2) \cdot X(t + \tau - \xi_2) d\xi_2 \right],$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E[X(t - \xi_1) X(t + \tau - \xi_2)] h(\xi_1) h(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2,$$

- Izraz pod operatorom očekivanja je $R_{XX}(t, t + \tau + \xi_1 - \xi_2)$, a kako je naš proces stacionaran u širem smislu slijedi:

Autokorelacijska funkcija odziva

$$R_{YY}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(\tau + \xi_1 - \xi_2) h(\xi_1) h(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2.$$

- Pretpostavka: $X(t)$ stacionaran u širem smislu.
- Slijedi da je $Y(t)$ isto stacionaran u širem smislu,
- a izraz za R_{YY} je dvostruka konvolucija ulazne autokorelacijske funkcije s impulsnim odzivom sustava:

$$R_{YY}(\tau) = R_{XX}(\tau) * h(-\tau) * h(\tau).$$

- $h(-\tau) * h(\tau)$ se naziva i autokorelacijom impulsnog odziva.

Spektar snage odziva

- Polazimo od poznatog izraza:

$$S_{YY}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{YY}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$S_{YY}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(\tau + \xi_1 - \xi_2) h(\xi_1) h(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi_1) \int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi_2) \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(\tau + \xi_1 - \xi_2) e^{-j\omega\tau} d\tau d\xi_2 d\xi_1.$$

Spektar snage odziva

- Supstituiramo:

$$\xi = \tau + \xi_1 - \xi_2, \quad d\xi = d\tau.$$

- Eksponencijalni član razdijelimo u 3 dijela:

$$\tau = \xi - \xi_1 + \xi_2, \quad e^{-j\omega\tau} = e^{-j\omega\xi} \cdot e^{+j\omega\xi_1} \cdot e^{-j\omega\xi_2}$$

$$R_{YY}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi_1) e^{+j\omega\xi_1} d\xi_1 \int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi_2) e^{-j\omega\xi_2} d\xi_2 \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(\xi) e^{-j\omega\xi} d\xi.$$

- Prvi član je $H^*(\omega)$, drugi je $H(\omega)$, a treći $S_{XX}(\omega)$.

Spektar snage odziva

- Konačno:

$$S_{YY}(\omega) = H^*(\omega) \cdot H(\omega) \cdot S_{XX}(\omega),$$

$$S_{YY}(\omega) = |H(\omega)|^2 \cdot S_{XX}(\omega).$$

- Dobiveni izraz povezuje spektre snage ulaznog i izlaznog slučajnog procesa.
- Vrlo važan međurezultat $|H(\omega)|^2$ nazivamo **prijenosnom funkcijom snage**.

Kroskorelacijska funkcija ulaza i izlaza

- Kroskorelacijska funkcija $X(t)$ i $Y(t)$ je:

$$R_{XY}(t, t + \tau) = E[X(t)Y(t + \tau)],$$

$$= E \left[X(t) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi) \cdot X(t + \tau - \xi) d\xi \right],$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} E[X(t) X(t + \tau - \xi)] h(\xi) d\xi,$$

- Izraz pod operatorom očekivanja je $R_{XX}(t, t + \tau - \xi)$, a ako je proces $X(t)$ stacionaran u širem smislu slijedi:

Kroskorelacijska funkcija ulaza i izlaza

$$R_{XY}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(\tau - \xi) h(\xi) d\xi.$$

- Izraz za R_{XY} je konvolucija ulazne autokorelacijske funkcije s impulsnim odzivom sustava.

$$R_{XY}(\tau) = R_{XX}(\tau) * h(\tau).$$

- Slično možemo pokazati:

$$R_{YX}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(\tau - \xi) h(-\xi) d\xi,$$

$$R_{YX}(\tau) = R_{XX}(\tau) * h(-\tau).$$

Kroskorelacijska funkcija ulaza i izlaza

- Izrazi za R_{XY} i R_{YX} ne ovise o vremenu $\rightarrow X(t)$ i $Y(t)$ su zajednički stacionarni u širem smislu (već smo prije pokazali da je R_{YY} neovisna o vremenu).

- Uvrstimo li rezultate u prethodni izraz za R_{YY} imamo:

$$R_{YY}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XY}(\tau + \xi) h(\xi) d\xi,$$

$$R_{YY}(\tau) = R_{XY}(\tau) * h(-\tau).$$

Kroskorelacijska funkcija ulaza i izlaza

- Slična supstitucija daje vezu:

$$R_{YY}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{YX}(\tau - \xi) h(\xi) d\xi,$$

$$R_{YY}(\tau) = R_{YX}(\tau) * h(\tau).$$

Kroskorelacijska funkcija ulaza i izlaza - primjer

- Nastavljamo prethodni primjer računajući R_{XY} i R_{YX} .

$$R_{XY}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N_0}{2} \delta(\tau - \xi) h(\xi) d\xi = \frac{N_0}{2} h(\tau).$$

$$R_{YX}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N_0}{2} \delta(\tau - \xi) h(-\xi) d\xi = \frac{N_0}{2} h(-\tau) = R_{XY}(-\tau).$$

- Potvrdili smo već poznatu vezu R_{XY} i R_{YX} .

Spektri međusnage

- Vrlo je lako pokazati da:

$$S_{XY}(\omega) = H(\omega) \cdot S_{XX}(\omega),$$

$$S_{YX}(\omega) = H(-\omega) \cdot S_{XX}(\omega),$$

Odziv vremenski stalnog diskretnog linearnog sustava

- Izlaz diskretnog vremenski stalnog linearnog sustava dan je konvolucijskom sumacijom:

$$\begin{array}{c} x_r(n) \\ \hline \boxed{h(n)} \\ \hline y_r(n) \end{array} \quad y_r(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n-m) x_r(m),$$

- što je bio izraz za jednu realizaciju slučajnog procesa x_r , a za sve realizacije možemo napisati:

$$\begin{array}{c} X(n) \\ \hline \boxed{h(n)} \\ \hline Y(n) \end{array} \quad Y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n-m) X(m).$$

Srednja (očekivana) vrijednost izlaza linearnog sustava

- U slučajnom procesu to vrijedi za svaku realizaciju, pa tako i za očekivanu vrijednost obje strane konvolucijske sumacije.

$$E[Y(n)] = E\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n-m) X(m)\right] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n-m) \underbrace{E[X(m)]}_{\bar{X}}$$

- Za stacionarne procese $E[X(m)]$ je konstanta, pa slijedi da je i $E[Y(n)]$ konstanta:

$$E[Y(n)] = \bar{Y} = \bar{X} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m).$$

Srednja (očekivana) vrijednost izlaza linearnog sustava

- Zanimljiv rezultat imamo i u Z-domeni.
- Kako je Z transformacija impulsnog odziva $h(m)$:

$$H(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) z^{-m}, \quad \text{slijedi da je}$$

$$H(1) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m), \quad \text{odnosno}$$

$$E[Y(n)] = \bar{Y} = \bar{X} \cdot H(1).$$

Autokorelacijska sekvencija

- Očekivana vrijednost $E[Y(n_1) Y(n_2)] = R_{yy}(n_1, n_2)$,

$$\begin{aligned} R_{yy}(n_1, n_2) &= E\left[\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n_1 - m) X(m)\right) \cdot Y(n_2)\right], \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n_1 - m) E[X(m) \cdot Y(n_2)], \end{aligned}$$

$$R_{yy}(n_1, n_2) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n_1 - m) R_{xy}(m, n_2)$$

- Za stacionarni proces, uz supstituciju $k = n_2 - n_1$ i $l = n_2 - m$ slijedi:

$$R_{yy}(k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l - k) R_{xy}(l)$$

Autokorelacijska sekvencija

- Isto tako možemo dobiti:

$$E[Y(n_1) \cdot X(n_2)] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n_1 - m) E[X(m) \cdot X(n_2)],$$

$$R_{yx}(n_1, n_2) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n_1 - m) R_{xx}(m, n_2).$$

- Za stacionarni proces, uz supstituciju $k = n_2 - n_1$ i $l = n_2 - m$ slijedi:

$$R_{yx}(k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l - k) R_{xx}(l),$$

$$R_{yx} = h * R_{xx}.$$

Autokorelacijska sekvencija

- Kako je $R_{xy}(k) = R_{yx}(-k)$ i $R_{xx}(k) = R_{xx}(-k)$, vrijedi:

$$R_{xy}(k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(-l + k) R_{xx}(l), \quad R_{xy}(k) = h(-k) * R_{xx}(k).$$

- Slično imamo:

$$R_{yy} = h * R_{xy},$$

$$R_{yy}(k) = \underbrace{h(k) * h(-k)} * R_{xx}(k).$$

Često se naziva autokorelacija impulsnog odziva r_{hh} .

$$R_{yy}(k) = r_{hh}(k) * R_{xx}(k).$$

Autokorelacijska sekvencija u frekvencijskoj domeni (F_{vd})

$$S_{YX}(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) S_{XX}(e^{j\omega}),$$

$$S_{XY}(e^{j\omega}) = S_{YX}(e^{-j\omega}),$$

$$S_{XY}(e^{j\omega}) = H(e^{-j\omega}) S_{XX}(e^{j\omega}),$$

$$S_{YY}(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) H(e^{-j\omega}) S_{XX}(e^{j\omega}),$$

$$S_{YY}(e^{j\omega}) = \underbrace{H(e^{j\omega})^2}_{R_{hh}(e^{j\omega})} S_{XX}(e^{j\omega}).$$

- Transfer funkcija snage $R_{hh}(e^{j\omega})$.

Autokorelacijska sekvencija u Z domeni

$$S_{YX}(z) = H(z) S_{XX}(z),$$

$$S_{XY}(z) = S_{YX}(z^{-1}),$$

$$S_{XY}(z) = H(z^{-1}) S_{XX}(z),$$

$$S_{YY}(z) = \underbrace{H(z) H(z^{-1})}_{R_{hh}(z)} S_{XX}(z).$$

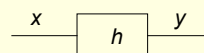
- Transfer funkcija snage $R_{hh}(z)$, ili transfer funkcija II reda.

Optimalni linearni sustavi

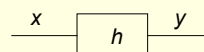
Prof. dr. sc. Hrvoje Babić
 Doc. dr. sc. Damir Seršić
<http://ts.zesoi.fer.hr>

Analiza i sinteza linearnih sustava

- Analiza: $x, h \rightarrow y$



- Sinteza: $x, y \rightarrow h$



- Analiza linearnih sustava je uvijek moguća, iako ne mora biti jednostavna.
- Sinteza ne mora dati ostvarivo rješenje: na realnom sustavu uvijek postoje ograničenja.

Sinteza linearnih sustava

- Realni sustavi – kauzalni, konačnog reda, s raspodijeljenim parametrima, ...
- Često znamo željeni odnos x i y , ali sustav h ne mora biti ostvariv.
- Zadatak sinteze: odrediti sustav koji zadovoljava ograničenja realnog sustava i aproksimira željeni odnos x i y .
- Za linearne sustave određivanje sustava je pronalaženje prijenosne funkcije ili impulsnog odziva.

Optimalni sustavi

- Latinski *optimus* = najbolji.
- Za sintezu **optimalnog** ili **najboljeg** sustava moramo poznavati:
 - ulazne specifikacije (*eng. input specification*),
 - ograničenja sustava (*eng. system constraints*),
 - kriterij optimalnosti (*eng. criterion of optimality*).

Ulazne specifikacije

- Ulaz može biti:
 - deterministički signal;
 - stohastički signal (realizacija slučajnog procesa):
 - zadan funkcijom gustoće vjerojatnosti ili razdiobom; odnosno opisan mjerama kao što su srednja vrijednost, autokorelacijska funkcija, spektar snage, ...
 - mješavina determinističkog i stohastičkog signala.

Ograničenja sustava

- Sustav može biti:
 - sa zbijenim ili raspodijeljenim parametrima,
 - linearan ili nelinearan,
 - kauzalan ili nekauzalan,
 - ostvariv ili neostvariv,
 - vremenski stalan ili promjenjiv,
 - s različitim ograničenjima realizacije ili bez njih.

Kriterij optimalnosti

- Kriterij optimalnosti
 - je smisljena mjera dobrote sustava.
 - Izražava se jednadžbama koje se dadu riješiti, analitički ili numerički.
 - Najčešće je to minimalizacija odstupanja realnog od željenog idealnog sustava.
 - Može biti i maksimalizacija udjela korisnih komponenti signala prema nekorisnim.

Wienerov filtar: kriterij

- Sustav koji **najbolje** izdvaja slučajni signal iz aditivnog šuma, uz eventualni vremenski pomak je **Wienerov filtar**.
- Sustav se projektira tako da njegov izlaz bude **najbolja** procjena (estimacija) prošle, sadašnje ili buduće trenutne vrijednosti realizacije slučajnog procesa.
- "Najbolje" ovdje znači "uz najmanju kvadratnu pogrešku" procjene.
- Pretpostavke:
 - korisnom slučajnom procesu $X(t)$ pribrojen je šum $N(t)$:
 $W(t) = X(t) + N(t)$.
 - $X(t)$ i $N(t)$ zajednički stacionarni u širem smislu, šum $N(t)$ je sa srednjom vrijednošću nula.

Model Wienerovog filtra

$W(t) = X(t) + N(t)$

$Y(t) = Y_X(t) + Y_N(t)$

$X(t)$

$X(t + t_0)$

pogreška
 $\varepsilon(t) = X(t + t_0) - Y(t)$

- Konceptualni model pogreške estimacije

$\Delta(\omega) = e^{j\omega t_0} \Rightarrow |\Delta(\omega)| = 1; \arg \Delta(\omega) = \omega t_0$
vremenski pomak $-t_0$

Model Wienerovog filtra

$W(t) = X(t) + N(t)$

$Y(t) = Y_X(t) + Y_N(t)$

$X(t)$

$X(t + t_0)$

pogreška
 $\varepsilon(t) = X(t + t_0) - Y(t)$

- za $t_0 > 0$, $t_0 = 0$, $t_0 < 0 \rightarrow$ ocjenjuje se buduća, sadašnja ili prošla vrijednost signala.
- Mjera pogreške: očekivanje kvadratne vrijednosti \rightarrow predstavlja srednju snagu procesa pogreške $\varepsilon(t)$.

Wienerov filtar, polazište

Aditivni model šuma:

$$W(t) = X(t) + N(t).$$

Pogreška:

$$\varepsilon(t) = X(t + t_0) - Y(t).$$

Želimo najmanju očekivanu kvadratnu pogrešku:

$$P_\varepsilon = E\{[X(t + t_0) - Y(t)]^2\}$$

Pritom ne brinemo da li će sustav $H(\omega)$ biti moguće realizirati.

Wienerov filtar

$$P_\varepsilon = E\{[X(t + t_0) - Y(t)]^2\} = E\{[X(t + t_0)^2 - 2Y(t)X(t + t_0) + Y(t)^2]\}$$

- $X(t)$ i $N(t)$ su zajednički stacionarni u širem smislu, pa imamo:

$$P_\varepsilon = R_{XX}(0) - 2R_{YX}(t_0) + R_{YY}(0),$$

$$P_\varepsilon = P_X - 2R_{YX}(t_0) + P_Y.$$

- Tražimo $H(\omega)$, stoga nam je zgodno napisati pribrojnik preko spektra snage.

Izraženo preko spektra snage

$$P_X = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega) d\omega,$$

$$P_Y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{WW}(\omega) |H(\omega)|^2 d\omega.$$

- Za kroskorelacijsku funkciju imamo:

$$R_{YX}(t_0) = E[Y(t)X(t + t_0)] = E\left[X(t + t_0) \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi) W(t - \xi) d\xi\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi) E[X(t + t_0) W(t - \xi)] d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} R_{WX}(t_0 + \xi) h(\xi) d\xi$$

Izraženo preko spektra snage

$$R_{YX}(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{WX}(t_0 + \xi) h(\xi) d\xi.$$

- Preko spektra međusnage:

$$R_{YX}(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{WX}(\omega) e^{j\omega(t_0 + \xi)} d\omega h(\xi) d\xi,$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{WX}(\omega) e^{j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi) e^{j\omega \xi} d\xi d\omega,$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{WX}(\omega) H(-\omega) e^{j\omega t_0} d\omega.$$

Konačno, izraz glasi:

$$P_\varepsilon = P_X - 2R_{YX}(t_0) + P_Y,$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{S_{XX}(\omega) - 2S_{WX}(\omega)H(-\omega)e^{j\omega t_0} + S_{WW}(\omega)|H(\omega)|^2\} d\omega$$

- Dakle, tražimo takvu $H(\omega)$ da je gornji izraz minimalan.
- $H(\omega)$ i $S_{WX}(\omega)$ ćemo zapisati u polarnom obliku:

$$H(\omega) = |H(\omega)|e^{j\arg H(\omega)}, \quad S_{WX}(\omega) = |S_{WX}(\omega)|e^{j\arg S_{WX}(\omega)}.$$

Optimalna fazna karakteristika

$$P_\varepsilon = P_X + P_Y - 2R_{YX}(t_0),$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{S_{XX}(\omega) + S_{WW}(\omega)|H(\omega)|^2\} d\omega$$

$$- \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2|S_{WX}(\omega)||H(\omega)|e^{j(\arg S_{WX}(\omega) - \arg H(\omega) + \omega t_0)} d\omega$$

- Za minimalan rezultat tražimo fazu sustava $\arg H(\omega)$ takvu da je drugi pribojnik maksimalan.

- Maksimum se postiže za:

$$\arg H(\omega) = \arg S_{WX}(\omega) + \omega t_0.$$

Optimalna amplitudna karakteristika

- Za odabranu fazu imamo:

$$P_\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{S_{XX}(\omega) - 2|S_{WX}(\omega)||H(\omega)| + S_{WW}(\omega)|H(\omega)|^2\} d\omega$$

- Kako bi izolirali traženi $|H(\omega)|$, napišimo podintegralni izraz kao:

$$\left\{ S_{XX}(\omega) - \frac{|S_{WX}(\omega)|^2}{S_{WW}(\omega)} + S_{WW}(\omega) \left[\frac{|S_{WX}(\omega)|}{S_{WW}(\omega)} - |H(\omega)| \right]^2 \right\}$$

- Minimum se postiže za: $|H(\omega)| = \frac{|S_{WX}(\omega)|}{S_{WW}(\omega)}$

Wienerov filter

- Optimalni filter je, dakle:

$$H_{opt}(\omega) = \frac{|S_{WX}(\omega)|}{S_{WW}(\omega)} e^{j(\arg S_{WX}(\omega) + \omega t_0)},$$

- Odnosno:

$$H_{opt}(\omega) = \frac{S_{WX}(\omega)}{S_{WW}(\omega)} e^{j\omega t_0}.$$

Wienerov filter, nekorelirani signal i šum

- Ukoliko signal i šum nisu korelirani, vrijedi:
- $S_{WW}(\omega) = S_{XX}(\omega) + S_{NN}(\omega)$,
- $S_{WX}(\omega) = S_{XX}(\omega)$
- Optimalna prijenosna funkcija koja najbolje izdvaja signal iz šuma je tada:

$$H_{opt}(\omega) = \frac{S_{XX}(\omega)}{S_{XX}(\omega) + S_{NN}(\omega)} e^{j\omega t_0}.$$

Ostvarivost Wienerovog filtra

- Općenito, impulsni odziv filtra je nekauzalan:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{XX}(\omega)}{S_{XX}(\omega) + S_{NN}(\omega)} e^{j\omega(t+t_0)} d\omega.$$

- Nekauzalni odziv je neostvariv.
- Možemo ga aproksimirati ako stavimo dovoljno veliko kašnjenje t_0 : nekauzalni dio odziva postaje zanemariv.
- Postoje i metode nalaženja ostvarivih Wienerovih filtara.

Pogreška Wienerovog filtra

- Srednja vrijednost (očekivanje) kvadrata greške estimacije je određena ostatom:

$$E[\varepsilon^2(t)]_{\min} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{XX}(\omega)S_{NN}(\omega)}{S_{XX}(\omega) + S_{NN}(\omega)} d\omega.$$

- To je **najmanja** kvadratna pogreška estimacije među svim linearnim sustavima.

Optimalna amplitudna karakteristika

- Promotrit ćemo optimalnu amplitudnu karakteristiku:

$$A(\omega) = \frac{S_{XX}(\omega)}{S_{XX}(\omega) + S_{NN}(\omega)},$$

- za dva posebna slučaja:
 - šum mnogo veći od korisnog signala,
 - korisni signal mnogo veći od šuma.

Optimalna amplitudna karakteristika

a) $S_{NN}(\omega) \gg S_{XX}(\omega)$

- Za bijeli šum vrijedi:

$$S_{NN}(\omega) = S_{NN}(0),$$

$$A(\omega) = \frac{S_{XX}(\omega)}{S_{XX}(\omega) + S_{NN}(0)} \approx \frac{S_{XX}(\omega)}{S_{NN}(0)}.$$

- Ako je šum velik, optimalni filter mora imati pojas propuštanja jednak pojasu spektra snage signala.

Optimalna amplitudna karakteristika

- Filter mora gušiti što više šuma, ali tako da izobličenje korisnog signala bude malo.
- Pogreška estimacije iznosi:

$$E_{\min}[\varepsilon^2(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{XX}(\omega)S_{NN}(\omega)}{S_{XX}(\omega) + S_{NN}(\omega)} d\omega \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{XX}(\omega)S_{NN}(\omega)}{S_{NN}(\omega)} d\omega,$$

$$E_{\min}[\varepsilon^2(t)] \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega) d\omega.$$

Optimalna amplitudna karakteristika

b) $S_{NN}(\omega) \ll S_{XX}(\omega)$

- Za slabi šum vrijedi:

$$A(\omega) = \frac{S_{XX}(\omega)}{S_{XX}(\omega) + S_{NN}(\omega)} \approx 1.$$

- Ako je šum slab, optimalno je da filter ima širok pojas propuštanja.

Prilagođeni filter

- Upotrebljava se u digitalnim komunikacijama, mjernoj instrumentaciji, detekciji radarskih i sonarskih signala, u nuklearnoj tehnici (određivanje zračenja), ...
- Prilagođeni filter maksimizira odnos signal-šum za deterministički signal uz prisutnost slučajnog šuma u nekom odabranom trenutku t_0 .
- Pretpostavke:
 - determinističkom signalu $x(t)$ pribrojena je realizacija šuma $n(t)$:
 $w(t) = x(t) + n(t)$.
 - Slučajni proces $N(t)$ je stacionaran u širem smislu.

Model prilagođenog filtra

- Prilagođeni filtar je određen **oblikom** signala kojeg želimo izdvojiti te svojstvima šuma.

$$\frac{x(t) + n(t)}{S_{NN}(\omega)} \rightarrow H(\omega) \rightarrow \frac{x_o(t) + n_o(t)}{S_{NN}(\omega) \cdot |H(\omega)|^2}$$

- Kako ne znamo oblik šuma, već samo njegovu gustoću spektra snage, prelazimo na:

$$\left(\frac{S}{N}\right) \rightarrow H(\omega) \rightarrow \left(\frac{S_o}{N_o}\right)$$

← omjer signal-šum ←

Odnos signal-šum

- Želimo da omjer signal-šum **na izlazu** filtra bude **maksimalan**.

Def. :

$$\left(\frac{S_o}{N_o}\right) = \frac{|x_o(t_0)|^2}{E[N_o^2(t)]}$$

↑ snaga determinističkog signala u trenutku t_0
 ↓ srednja vrijednost snage šuma

Odnos signal-šum

- Deterministički signal na izlazu filtra određen je inverznom Fourierovom transformacijom:

$$x_o(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) H(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

- Srednja vrijednost snage šuma na izlazu filtra određena je sa:

$$E[N_o^2(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{NN}(\omega) |H(\omega)|^2 d\omega.$$

Odnos signal-šum

⇒

$$\left(\frac{S_o}{N_o}\right) = \frac{\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) H(\omega) e^{j\omega t_0} d\omega \right|^2}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{NN}(\omega) |H(\omega)|^2 d\omega}$$

- Tražimo maksimum omjera signal-šum na izlazu filtra.

Maksimum omjera signal-šum

- Iskoristit ćemo Schwartzovu nejednakost:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) B(\omega) d\omega \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |A(\omega)|^2 d\omega \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |B(\omega)|^2 d\omega.$$

- Znak jednakosti vrijedi samo ako je:

$$B(\omega) = c \cdot A^*(\omega),$$

- gdje je c realna konstanta.

Maksimum omjera signal-šum

- Schwartzovu nejednakost primjenjujemo na izraz u brojniku, pri čemu ćemo odabrati:

$$A(\omega) = H(\omega) \sqrt{S_{NN}(\omega)},$$

$$B(\omega) = \frac{X(\omega) e^{j\omega t_0}}{2\pi \sqrt{S_{NN}(\omega)}}.$$

- Pri tome nas drugi korijen iz gustoće spektra snage ne treba brinuti jer je on uvijek pozitivna veličina.

Maksimum omjera signal-šum

⇒
$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) \sqrt{S_{NN}(\omega)} \cdot \frac{X(\omega) e^{j\omega t_0}}{2\pi \sqrt{S_{NN}(\omega)}} d\omega \right|^2 \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 S_{NN}(\omega) d\omega \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|X(\omega)|^2}{S_{NN}(\omega)} d\omega$$

krati nazivnik

Maksimum omjera signal-šum

- Pa je omjer signal-šum na izlazu određen relacijom:

$$\left(\frac{S_o}{N_o} \right) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|X(\omega)|^2}{S_{NN}(\omega)} d\omega.$$
- Želimo maksimum, tj. da vrijedi jednakost:

$$\left(\frac{S_o}{N_o} \right)_{\max} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|X(\omega)|^2}{S_{NN}(\omega)} d\omega.$$

Maksimum omjera signal-šum

- Kao što je već navedeno, jednakost vrijedi za:

$$B(\omega) = c \cdot A^*(\omega),$$
- pa slijedi:

$$\frac{X(\omega) e^{j\omega t_0}}{2\pi \sqrt{S_{NN}(\omega)}} = c \cdot H^*(\omega) \sqrt{S_{NN}(\omega)}.$$

Prilagođeni filter

- Iz toga slijedi optimalna prijenosna funkcija prilagođenog filtra:

$$H_{opt}^*(\omega) = \frac{X(\omega) e^{j\omega t_0}}{2\pi \cdot c \cdot S_{NN}(\omega)},$$
- odnosno:

$$H_{opt}(\omega) = \frac{X^*(\omega) e^{-j\omega t_0}}{2\pi \cdot c \cdot S_{NN}(\omega)}.$$
- Filter je prilagođen ulaznom signalu.
- Trenutak t_0 kada odnos signal-šum na izlazu filtra postigne maksimum se pojavljuje kao proizvoljno kašnjenje.

Prilagođeni filter za bijeli šum

- Za bijeli šum vrijedi:

$$S_{NN}(\omega) = konst.$$
- ⇒
$$H_{opt}(\omega) = k \cdot X^*(\omega) e^{-j\omega t_0}.$$
- Kod bijelog šuma je $H_{opt}(\omega)$ proporcionalan prigušenom konjugiranom spektru signala.

Prilagođeni filter za bijeli šum

$$H_{opt}(\omega) = k \cdot X(-\omega) e^{-j\omega t_0}$$

$$H_{opt}(-\omega) = k \cdot X(\omega) e^{j\omega t_0}$$

- To znači da će impulsni odziv prilagođenog filtra biti dan sa:

$$h_{opt}(-t) = k \cdot x(t + t_0),$$
- odnosno:

$$h_{opt}(t) = k \cdot x(t_0 - t).$$

Prilagođeni filtar za bijeli šum

- Primjer:

The diagram illustrates the process of time reversal. It starts with a signal $x(t)$ on the left, which is a red trapezoidal pulse. This is followed by an arrow pointing to the right, where the signal is shown as $x(t-t_0)$, shifted to the right by t_0 . A second arrow points to the right, where the signal is shown as $x(t_0-t)$, which is a mirror image of $x(t-t_0)$ reflected across a vertical axis at t_0 . The text 'zrcaljenje oko vertikale kroz t_0 ' (reflection about the vertical axis through t_0) is written next to the final graph.

Odziv prilagođenog filtra

- Odziv linearnog vremenski nepromjenjivog filtra određen je konvolucijskim integralom:

$$y_{opt}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h_{opt}(t-\tau) d\tau,$$

$$= k \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) x(t_0-(t-\tau)) d\tau,$$

$$= k \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) x(t_0-(t-\tau)) d\tau.$$

Odziv prilagođenog filtra

$$y_{opt}(t) = k \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) x(t_0-t+\tau) d\tau$$

- Što za $t=t_0$ iznosi:

$$y_{opt}(t) = k \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)^2 d\tau,$$

$$y_{opt}(t) = k \cdot E_X \Rightarrow \text{energija ulaznog signala}$$

Odziv prilagođenog filtra

- Odziv u trenutku $t=t_0$ proporcionalan je energiji ulaznog signala.