Osnove slučajnih procesa

Prof. dr. sc. Sven Lončarić
Prof. dr. sc. Hrvoje Babić
Doc. dr. sc. Damir Seršić

Literatura

- WEB: http://ts.zesoi.fer.hr
- H. Babić, S. Lončarić, D. Seršić: *Slučajni procesi u sustavima*, http://spus.zesoi.fer.hr, 2002.
- P. Z. Peebles: *Probability, Random Variables and Random Signal Principles, 3rd ed.*, McGraw-Hill, 1993.
- D.G.Manolakis, V.K.Ingle, S.M.Kogon: *Statistical and Adaptive Signal Processing*, McGraw-Hill, 2000
- M.H. Hayes: *Statistical digital signal processing and modeling*, John Wiley & Sons, 1996.

Koncept slučajnog procesa

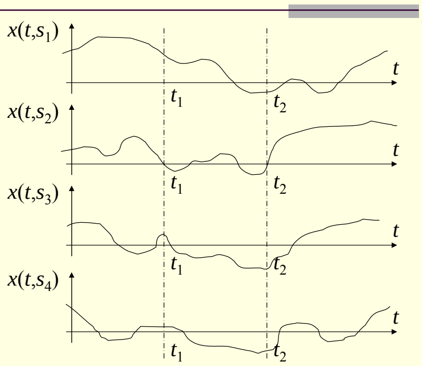
- U brojnim primjenama (kompresija, prijenos, …) eksploatiraju se statistička svojstva signala i to:
  - jedne pojave (realizacije),
  - skupa srodnih signala.
- Druga varijanta vodi do koncepta slučajnog procesa.
- Engl. *random process* ili *stochastic process*.
- Koncept slučajnog procesa dobiva se iz koncepta slučajne varijable uz dodavanje vremenske varijable.

Koncept slučajnog procesa

- Slučajna varijabla je preslikavanje koje svakom ishodu eksperimenta *s* dodjeljuje broj *x*(*s*), a koji se zove realizacija slučajne varijable.
- Slučajni proces je preslikavanje koje svakom ishodu eksperimenta *s* dodjeljuje funkciju vremena *x*(*t*, *s*) – jednu realizaciju.
- Obitelj svih takvih funkcija *x*(*t*, *s*) zove se slučajni proces i označava se kao **X**(*t*, *s*) ili kraće **X**(*t*).

Koncept slučajnog procesa

- Za $t = t_1$ $X(t_1,s)$ je slučajna varijabla



Klasifikacije slučajnih procesa

- Diskretni i kontinuirani slučajni procesi
  - slobodna i/ili zavisna varijabla mogu biti iz kontinuiranog ili prebrojivog skupa.
- Deterministički i nedeterministički
  - pojedina realizacija može biti predvidiva ili nepredvidiva.
- Stacionarni i nestacionarni
  - ovisno o promjenjivosti statističkih svojstava u vremenu.

Funkcije distribucije slučajnog procesa

- U određenom trenutku t, $\mathbf{X}(t)$ je slučajna varijabla koja ima funkciju distribucije prvog reda definiranu izrazom:

$$F_X(x,t) = P(\mathbf{X}(t) \le x)$$

- To je funkcija distribucije prvog reda.

Funkcija distribucije *N*-tog reda

- Za N slučajnih varijabli $\mathbf{X}_i = \mathbf{X}(t_i)$, $i = 1, 2, \ldots, N$ funkcija distribucije N-tog reda slučajnog procesa $\mathbf{X}(t)$ definirana je izrazom:

$$F_X(x_1,\ldots,x_N,t_1,\ldots,t_N) =$$
$$= P(\mathbf{X}(t_1) \le x_1,\ldots,\mathbf{X}(t_N) \le x_N)$$

Funkcije gustoće vjerojatnosti slučajnog procesa

- Funkcija gustoće vjerojatnosti prvog reda slučajnog procesa $\mathbf{X}(t)$ definirana je izrazom:

$$f_X(x,t) = \frac{dF_X(x,t)}{dx}$$

- Funkcija gustoće vjerojatnosti N-tog reda:

$$f_X(x_1,\ldots,x_N,t_1,\ldots,t_N) = \frac{\partial^N F_X(x_1,\ldots,x_N,t_1,\ldots,t_N)}{\partial x_1 \cdots \partial x_N}$$

Definicija stacionarnosti

- Definicija: stohastički proces $\mathbf{X}(t)$ je stacionaran ako za svaki $n \in \boldsymbol{N}$, za svaki izbor trenutaka $t_1, \ldots, t_n$ i za svaki $u \in \boldsymbol{R}$ slučajne varijable $\mathbf{X}(t_1), \ldots, \mathbf{X}(t_n)$ i slučajne varijable $\mathbf{X}(t_1+u), \ldots, \mathbf{X}(t_n+u)$ imaju jednake funkcije distribucije n-tog reda.
- Definicija: slučajni proces koji nije stacionaran zove se nestacionaran slučajni proces.

Definicija statističke nezavisnosti

- Dva procesa $\mathbf{X}(t)$ i $\mathbf{Y}(t)$ su statistički nezavisni ako je grupa slučajnih varijabli $\mathbf{X}(t_1), \ldots, \mathbf{X}(t_N)$ nezavisna od grupe $\mathbf{Y}(t_1'), \ldots, \mathbf{Y}(t_N')$ za bilo koji izbor trenutaka $t_1, \ldots, t_N, t_1', \ldots, t_N'$.
- Nezavisnost zahtijeva da vrijedi:

$$f_{X,Y}(x_1,\ldots,x_N,y_1,\ldots,y_N,t_1,\ldots,t_N,t_1',\ldots,t_N') =$$
$$= f_X(x_1,\ldots,x_N,t_1,\ldots,t_N)\, f_Y(y_1,\ldots,y_N,t_1',\ldots,t_N')$$

Stacionarnost prvog reda

- Definicija: Slučajni proces je stacionaran prvog reda ako se funkcija gustoće vjerojatnosti prvog reda ne mijenja s vremenom:

$$f_X(x,t) = f_X(x,t+\Delta t)$$

za svaki t i Δt.

- To znači da su i svi statistički deskriptori prvog reda (srednja vrijednost, varijanca i ostali) nepromjenjivi u vremenu.

Stacionarnost drugog reda

- Definicija: slučajni proces je stacionaran drugog reda ako vrijedi

$$f_X(x_1,x_2,t_1,t_2)=f_X(x_1,x_2,t_1+\Delta t,t_2+\Delta t)$$

- Stacionarost drugog reda implicira stacionarnost prvog reda, što se vidi iz:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy$$

Stacionarnost drugog reda

- Ako u izrazu za definiciju stacionarnosti

$$f_X(x_1,x_2,t_1,t_2)=f_X(x_1,x_2,t_1+\Delta t,t_2+\Delta t)$$

- odaberemo npr. $\Delta t=-t_1$, tada dobivamo

$$f_X(x_1,x_2,t_1,t_2)=f_X(x_1,x_2,0,t_2-t_1)$$

- Dakle vidi se da f_X ovisi samo o razlici t_2-t_1

Korelacija slučajnih varijabli

- Promatrajmo korelaciju dvaju slučajnih varijabli $\mathbf{X}_1=\mathbf{X}(t_1)$ i $\mathbf{X}_2=\mathbf{X}(t_2)$ definiranu izrazom

$$E[\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2]=E[\mathbf{X}(t_1)\mathbf{X}(t_2)]$$

- Vidi se da ova korelacija općenito ovisi o trenucima t_1 i t_2.

Autokorelacijska funkcija slučajnog procesa

- Definicija: autokorelacijska funkcija slučajnog procesa $\mathbf{X}(t)$ definirana je izrazom:

$$R_{XX}(t_1,t_2)=E[\mathbf{X}(t_1)\mathbf{X}(t_2)]$$

- Dakle autokorelacijska funkcija jednaka je jednostavnoj korelaciji dviju susjednih slučajnih varijabli.

Autokorelacijska funkcija slučajnog procesa

- Budući da korelacija dviju slučajnih varijabli ovisi o funkciji gustoće drugog reda, slijedi da autokorelacijska funkcija stacionarnog procesa drugog reda ovisi samo o razlici $\tau=t_2-t_1$.

$$R_{XX}(t_1,t_1+\tau)=E[\mathbf{X}(t_1)\mathbf{X}(t_1+\tau)]=R_{XX}(\tau)$$

Stacionarnost u širem smislu

- Stacionarnost u užem smislu je strog uvjet kojeg je teško provjeriti u praksi.
- Definicija: proces je stacionaran u širem smislu ako vrijedi:

$$E[\mathbf{X}(t)]=\text{konst}$$

$$E[\mathbf{X}(t)\mathbf{X}(t+\tau)]=R_{XX}(\tau)$$

Proces koji je stacionaran drugog reda je stacionaran i u širem smislu.

- Obrat ne vrijedi.

Vremensko usrednjavanje

- Definicija: vremensko usrednjavanje (ili prosjek) neke veličine definiran je kao:

$$A[.] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} [.]dt$$

- Notacija *A* je analogna notaciji *E* za statistički prosjek.
- *A* je vremenski prosjek (engl. *time-average*).

Vremenska srednja vrijednost i autokorelacija

- Vremenska srednja vrijednost definirana je izrazom:

$$\bar{x} = A[x(t)] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)dt$$

- Vremenska autokorelacijska funkcija definirana je izrazom:

$$\mathrm{R}_{xx}(\tau) = A[x(t)x(t+\tau)] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)x(t+\tau)dt$$

Ergodičnost

- Ako je X stacionaran proces u širem smislu vrijedi:

$$E[\bar{x}] = E[\mathbf{X}(t)] = \overline{\mathbf{X}}$$
$$E[\mathrm{R}_{XX}(\tau)] = R_{XX}(\tau)$$

- Definicija: slučajni proces je ergodičan ako je vremensko usrednjavanje jednako statističkom usrednjavanju.
- U praksi često možemo pretpostaviti da je proces ergodičan, a nekad nemamo drugog izbora (imamo samo jednu realizaciju).

Auto-korelacijska funkcija

- Definicija: auto-korelacijska funkcija slučajnog procesa **X**(*t*) je korelacija dvaju slučajnih varijabli **X**(*t*) i **X**(*t* + τ)

$$R_{XX}(t, t+\tau) = E[\mathbf{X}(t)\mathbf{X}(t+\tau)]$$

Svojstva

- Za procese koji su stacionarni u širem smislu

$$R_{XX}(\tau) = E[\mathbf{X}(t)\mathbf{X}(t+\tau)]$$

- Tada vrijedi

$$|R_{XX}(\tau)| \le R_{XX}(0)$$
$$R_{XX}(-\tau) = R_{XX}(\tau)$$
$$R_{XX}(0) = E[\mathbf{X}^2(t)]$$

Kros-korelacijska funkcija

- Definicija: kros-korelacijska funkcija dvaju slučajnih procesa **X**(*t*) i **Y**(*t*) definirana je kao

$$R_{XY}(t, t+\tau) = E[\mathbf{X}(t)\mathbf{Y}(t+\tau)]$$

- Ako su **X**(*t*) i **Y**(*t*) zajednički stacionarni u širem smislu onda je

$$R_{XY}(\tau) = E[\mathbf{X}(t)\mathbf{Y}(t+\tau)]$$

Ortogonalni slučajni procesi

- Definicija: Ako za dva slučajna procesa **X**(t) i **Y**(t) vrijedi

$$R_{XY}(t,t+\tau)=0$$

onda su **X**(t) i **Y**(t) ortogonalni slučajni procesi.

Nezavisni slučajni procesi

- Definicija: ako su dva slučajna procesa **X**(t) i **Y**(t) statistički nezavisna onda vrijedi

$$R_{XY}(t,t+\tau)=E[\mathbf{X}(t)]E[\mathbf{Y}(t+\tau)]$$

- Ako su dva procesa još i stacionarni u širem smislu onda je

$$R_{XY}(t,t+\tau)=\overline{\mathbf{X}}\overline{\mathbf{Y}}=\text{konst}$$

Svojstva kros-korelacijskih funkcija

- Kros-korelacijske funkcije imaju slijedeća svojstva

$$R_{XY}(-\tau)=R_{YX}(\tau)$$
$$|R_{XY}(\tau)|\le\sqrt{R_{XX}(0)R_{YY}(0)}$$
$$|R_{XY}(\tau)|\le\frac{1}{2}[R_{XX}(0)+R_{YY}(0)]$$

Auto-kovarijancijska funkcija

- Definicija: auto-kovarijancijska funkcija slučajnog procesa **X**(t) definirana je kao

$$C_{XX}(t,t+\tau)=$$
$$=E[\{\mathbf{X}(t)-E[\mathbf{X}(t)]\}\{\mathbf{X}(t+\tau)-E[\mathbf{X}(t+\tau)]\}]$$

- Ovaj izraz može se pisati i kao

$$C_{XX}(t,t+\tau)=$$
$$=R_{XX}(t,t+\tau)-E[\mathbf{X}(t)]E[\mathbf{X}(t+\tau)]$$

Kros-kovarijancijska funkcija

- Definicija: Kros-kovarijancijska funkcija dvaju slučajnih procesa **X**(t) i **Y**(t) definirana je izrazom:

$$C_{XY}(t,t+\tau)=$$
$$=E[\{\mathbf{X}(t)-E[\mathbf{X}(t)]\}\{\mathbf{Y}(t+\tau)-E[\mathbf{Y}(t+\tau)]\}]$$

- Izraz se može pisati i u slijedećoj formi

$$C_{XY}(t,t+\tau)=$$
$$=R_{XY}(t,t+\tau)-E[\mathbf{X}(t)]E[\mathbf{Y}(t+\tau)]$$

Slučaj stacionarnih procesa

- Za slučajne procese koji su zajednički stacionarni u širem smislu vrijede jednostavniji izrazi za auto-kovarijancijsku i kros-kovarijancijsku funkciju:

$$C_{XX}(\tau)=R_{XX}(\tau)-\overline{\mathbf{X}}^2$$
$$C_{XY}(\tau)=R_{XY}(\tau)-\overline{\mathbf{X}}\overline{\mathbf{Y}}$$

Varijanca slučajnog procesa

- Definicija: varijanca slučajnog procesa je vrijednost auto-kovarijancijske funkcije za $\tau = 0$:

$$\sigma_x^2 = C_{XX}(t,t)$$

- Za proces koji je stacionaran u širem smislu vrijedi:

$$\sigma_x^2 = C_{XX}(t,t) = R_{XX}(0) - \overline{\mathbf{X}}^2 = \text{konst}$$

Nekorelirani slučajni procesi

- Definicija: Za dva slučajna procesa **X**(t) i **Y**(t) ako vrijedi

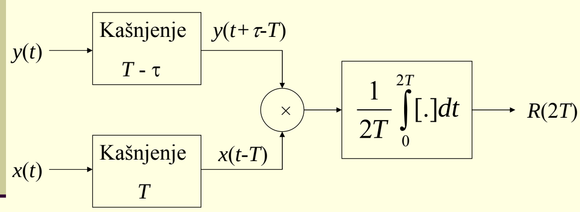
$$C_{XY}(t, t+\tau) = 0$$

onda su procesi nekorelirani.

Mjerenje korelacijske funkcije

- U praksi ne možemo nikada izmjeriti prave korelacijske funkcije dvaju procesa **X**(t) i **Y**(t) zato jer nikada nemamo sve realizacije procesa.
- Jedini način u tom slučaju je mjerenje vremenskim usrednjavanjem u dovoljno dugom intervalu i uz prepostavku da se radi o ergodičnom procesu.

Mjerenje kros-korelacijske funkcije



Blok dijagram sustava za mjerenje kros-korelacijske funkcije

Mjerenje kros-korelacijske funkcije

- Ako u trenutku t = 0 započinje integracija i ako promatramo izlaz $R(t)$ u trenutku t = 2T onda

$$R(2T) = \frac{1}{2T}\int_0^{2T} x(t-T)\,y(t-T+\tau)\,dt$$

$$= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t')\,y(t'+\tau)\,dt'$$

- Dakle za T>> vrijedi $R(2T) \approx \mathrm{R}_{XY}(\tau) = R_{XY}(\tau)$

Mjerenje auto-korelacijske funkcije

- Ako na prethodnom blok dijagramu spojimo ulaze onda možemo mjeriti auto-korelacijsku funkciju slučajnog procesa pod pretpostavkom da je proces ergodičan.

Gaussov slučajni proces

- Definicija: Neka je za slučajni proces X(t) definirano N slučajnih varijabli $\mathbf{X}_1=\mathbf{X}(t_1)$, $\mathbf{X}_2=\mathbf{X}(t_2)$, …, $\mathbf{X}_N=\mathbf{X}(t_N)$ koje su definirane u N vremenskih trenutaka $t_1, t_2, \ldots, t_N$.
- Neka su za bilo koji N i trenutke $t_1, t_2, \ldots, t_N$ ove varijable zajednički Gaussove, tj. imaju gustoću vjerojatnosti N-tog reda danu izrazom:

Gaussov slučajni proces

$$f_X(x_1,\ldots,x_N,t_1,\ldots,t_N)=\frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\overline{\mathbf{x}})^T\mathbf{C}_x^{-1}(\mathbf{x}-\overline{\mathbf{x}})\right\}}{\sqrt{(2\pi)^N\,|\mathbf{C}_x|}}$$

gdje je vektor

$$\mathbf{x}=[x_1\ldots x_N]^T$$

te

$$\overline{\mathbf{x}}=[\overline{x}_1\ldots\overline{x}_N]^T$$

vektor srednjih vrijednosti, a

Gaussov slučajni proces

$$\mathbf{C}_x=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1N} \\ \vdots & & & \vdots \\ C_{N1} & C_{N2} & \cdots & C_{NN} \end{bmatrix}$$

kovarijancijska matrica čiji su elementi

$$C_{ij}=E[(\mathbf{X}_i-\overline{\mathbf{X}}_i)(\mathbf{X}_j-\overline{\mathbf{X}}_j)]=C_{xx}(t_i,t_k)$$

$$\overline{\mathbf{X}}_i=E[\mathbf{X}_i]=E[\mathbf{X}(t_i)]$$

Gaussov slučajni proces

- Iz definicije se vidi da je Gaussov slučajni proces određen s vektorom srednjih vrijednosti i kovarijancijskom matricom.
- Budući da vrijedi

$$C_{xx}(t_i,t_k)=R_{xx}(t_i,t_k)-E[\mathbf{X}(t_i)]E[\mathbf{X}(t_k)]$$

slijedi da je specifikacija Gaussovog procesa moguća pomoću auto-korelacijske funkcije R_{XX} slučajnog procesa i srednjih vrijednosti.

Gaussov slučajni proces

- Ako Gaussov proces nije stacionaran onda srednje vrijednosti i auto-korelacijska funkcija ovise o vremenu.

Gaussov slučajni proces

- Ako je Gaussov proces stacionaran u širem smislu srednja vrijednost je konstantna

$$\overline{\mathbf{X}}_i=E[\mathbf{X}(t_i)]=\text{konst.}$$

dok auto-kovarijancijska i auto-korelacijska funkcija ovise samo o razlikama vremena, a ne o apsolutnom vremenu:

$$C_{xx}(t_i,t_k)=C_{xx}(t_k-t_i)$$

$$R_{xx}(t_i,t_k)=R_{xx}(t_k-t_i)$$