Spektralne karakteristike slučajnih procesa

Prof. dr. sc. Hrvoje Babić
Doc. dr. sc. Damir Seršić

Spektar snage signala

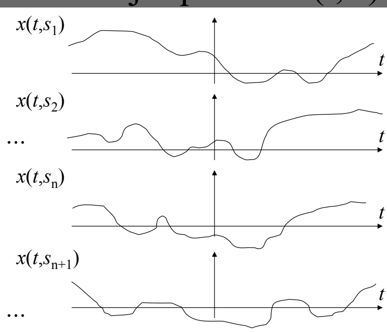
- Fourierova transformacija: $x(t)$ o–> $X(\omega)$.

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \qquad x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t}\, dt$$

- Uvjet konvergencije – apsolutna integrabilnost $x(t)$:

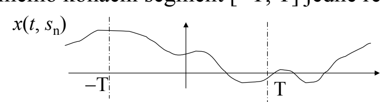
$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, dt < \infty$$

Slučajni proces $\boldsymbol{X}(t, s)$



Spektar snage signala

- Realizacija beskonačnog trajanja: integral divergira.
- Uzmemo konačni segment [–T, T] jedne realizacije:



$$x_T(t, s_n) = \begin{cases} x(t, s_n) & -T < t < T \\ 0 & drugdje \end{cases}$$

- T – konačan => integral konvergira.
- Fourierov spektar postoji: $$X_T(\omega)=\int_{-T}^{T} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

Energija i snaga signala

- Energija u intervalu 2T:

$$\mathcal{E}(T)=\int_{-T}^{T} x^2(t)\, dt.$$

- Snaga: $$P(T)=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x^2(t)\, dt$$

  = energija u jedinici vremena.

Gustoća spektra snage signala

- Parsevalov teorem za energije:

$$\mathcal{E}(T)=\int_{-\infty}^{\infty} x_T^2(t)\, dt \quad = \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X_T(\omega)|^2 d\omega.$$

- Snaga = energija / vrijeme:

$$P(T)=\frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty} x_T^2(t)\, dt \quad = \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{|X_T(\omega)|^2}{2T}}_{\text{gustoca sp. snage}} d\omega.$$

- Veći T => točniji izraz za snagu jedne realizacije $x(t, s_n)$ slučajnog procesa $\boldsymbol{X}(t, s)$.

Gustoća spektra snage

- Do sada: jedna realizacija $x(t, s_n)$ iz ansambla $\boldsymbol{X}(t, s)$.
- $P(T)$ fluktuira za različite slučajne varijable s_n.
- Neka je:

$$P_n = \lim_{T\to\infty} P_n(T), \qquad P_{XX} = E[P_n].$$

- slijedi:

$$P_{XX} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} E\left[X_T^2(t)\right] dt.$$

= srednja snaga slučajnog procesa $\boldsymbol{X}(t)$.

Gustoća spektra snage

- Parsevalov teorem:

$$P_{XX} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{E[\,|X_T(\omega)|^2\,]}{2T} d\omega.$$

- Srednja snaga procesa $\boldsymbol{X}(t)$ je dana vremenskom srednjom vrijednošću $A\{\cdot\}$ drugog momenta:

$$P_{XX} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} E\left[X^2(t)\right] dt$$
$$= A\left\{ E\left[X^2(t)\right]\right\}.$$

Gustoća spektra snage

- Za stacionarni proces:

$$P_{XX} = E[\,X^2(t)] = \overline{\mathrm{X}^2} = konst.$$

- Nadalje, srednja snaga procesa može se izračunati i integracijom gustoće spektra snage:

$$P_{XX} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega)\, d\omega,$$

$$S_{XX}(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{E[\,|X_T(\omega)|^2\,]}{2T}.$$

Svojstva gustoće spektra snage

1.) $S_{xx}(\omega) \geq 0$,
2.) $S_{xx}(-\omega) = S_{xx}(\omega)$,
3.) $S_{xx}(\omega)$ – realan.

- Standardna devijacija spektra snage
  => efektivna širina pojasa.

$$\Omega^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2\, S_{XX}(\omega)\, d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega)\, d\omega}.$$

Autokorelacija - spektar snage

$$S_{XX}(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{E[\,X_T^*(\omega)\cdot X_T(\omega)]}{2T}$$
$$= \lim_{T\to\infty} E\Big[\, \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t_1)\, e^{j\omega t_1} dt_1 \cdot \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t_2)\, e^{-j\omega t_2} dt_2\,\Big]$$
$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} \underbrace{E[\,X(t_1)\, X(t_2)]}_{R_{XX}(t_1,t_2)}\, e^{-j\omega(t_2-t_1)} dt_2 dt_1$$

- $R_{XX}(t_1, t_2)$ – autokorelacijska funkcija procesa $X(t)$.

Autokorelacija - spektar snage

- Uz $t = t_1$ i $\tau = t_2 - t_1$ izlazi:

$$S_{XX}(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T-t}^{T-t} \int_{-T}^{T} R_{XX}(t, t+\tau)\, dt\; e^{-j\omega\tau} d\tau$$

- Vanjski integral ne ovisi o T, već samo o τ :

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} R_{XX}(t, t+\tau)\, dt \right\} e^{-j\omega\tau}}_{} d\tau$$

vremenska srednja vrijednost autokorelacijske funkcije procesa $\boldsymbol{X}(t)$.

Autokorelacija - spektar snage

$$S_{XX}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A[\,R_{XX}(t, t+\tau)]e^{-j\omega\tau}d\tau$$

- $S_{xx}(\omega)$ i $A[R_{xx}(t, t+\tau)]$ su Fourierov transformacijski par:

  $S_{XX}(\omega)$ <–o $A[R_{XX}(t, t+\tau)]$
- Za $\boldsymbol{X}(t)$ stacionaran u širem smislu vrijedi:

  $A[R_{XX}(t, t+\tau)] = R_{XX}(\tau)$
- => AKF nije funkcija vremena, već samo pomaka τ.

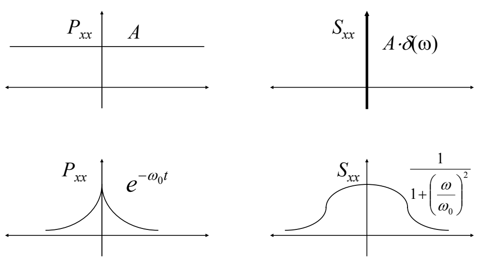
Wiener-Khinchinove relacije

$$S_{XX}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$R_{XX}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega$$

- Veza autokorelacijske funkcije i spektra snage stacionarnog slučajnog procesa.

Wiener-Khinchinove relacije



Kroskorelacija – spektralna gustoća međusnage

- Neka je proces $\boldsymbol{W}(t) = \boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{Y}(t)$.
- Autokorelacija $R_{WW}(t, t+\tau) = E[\boldsymbol{W}(t)\,\boldsymbol{W}(t+\tau)] =$

  $E\{[\boldsymbol{X}(t)+\boldsymbol{Y}(t)]\cdot[\boldsymbol{X}(t+\tau)+\boldsymbol{Y}(t+\tau)]\} =$

  $R_{XX}(t, t+\tau) + R_{YY}(t, t+\tau) + R_{XY}(t, t+\tau) + R_{YX}(t, t+\tau)$.
- Napravimo vremensku srednju vrijednost $A[\cdot]$ i uradimo Fourierovu transformaciju:
- $S_{WW}(\omega) = S_{XX}(\omega) + S_{YY}(\omega) + S_{XY}(\omega) + S_{YX}(\omega)$.
- Dva nova člana $S_{XY}(\omega)$ i $S_{YX}(\omega)$ su **spektri međusnage** (*engl.* cross-spectra)

Kroskorelacija – spektralna gustoća međusnage

- Mogu se dobiti iz Fourierovog spektra konačnog segmenta jedne realizacije:

  $x_T(t)$ o–> $X_T(\omega)$,

  $y_T(t)$ o–> $Y_T(\omega)$.
- Međusnaga dva signala:

$$P_{XY}(T) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X_T(t)Y_T(t)\,dt$$

- Parsevalov teorem daje:

$$P_{XY}(T) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{X_T^*(\omega)\,Y_T(\omega)}{2T}d\omega$$

Kroskorelacija – spektralna gustoća međusnage

- Srednja vrijednost preko članova ansambla:

$$\overline{P}_{XY}(T) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{E\left[X_T^*(\omega)\,Y_T(\omega)\right]}{2T}d\omega$$

- Za $T \to \infty$ najbolja procjena:

$$\overline{P}_{XY} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\lim_{T\to\infty}\frac{E\left[X_T^*(\omega)\,Y_T(\omega)\right]}{2T}}_{S_{XY}(\omega)}d\omega$$

$$\overline{P}_{XY} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{XY}(\omega)\,d\omega$$

- Analogno za P_{YX}.

Svojstva spektra međusnage

- $S_{XY}(\omega) = S_{YX}(-\omega) = S_{YX}^*(\omega)$,
- $\mathrm{Re}[S_{XY}(\omega)]$ – parna funkcija,
- $\mathrm{Im}[S_{XY}(\omega)]$ – neparna funkcija,
- ako su $S_{XY}(\omega) = 0$ i $S_{YX}(\omega) = 0$ kaže se da su $\boldsymbol{X}(t)$ i $\boldsymbol{Y}(t)$ ortogonalni: $\boldsymbol{X}(t) \perp \boldsymbol{Y}(t)$,
- vrijedi: $A[R_{XY}(t, t+\tau)]$ o–> $S_{XY}(\omega)$ (izvod sličan kao kod autokorelacje),
- tj. kroskorelacijska funkcija i spektar međusnage čine Fourierov transformacijski par,
- za stacionarne procese vrijedi: $R_{XY}(t, t+\tau)$ o–> $S_{XY}(\omega)$.

Gustoća spektra snage vremenski diskretnih slučajnih procesa

$$S_{XX}\left(e^{j\omega}\right) = \lim_{N\to\infty} \frac{E[X_N^* X_N]}{2N+1}$$

$$= \lim_{N\to\infty} E\left\{ \frac{1}{2N+1} \sum_{n_1=-N}^{N} X(n_1)\, e^{j\omega n_1} \cdot \sum_{n_2=-N}^{N} X(n_2)\, e^{-j\omega n_2} \right\}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n_1=-N}^{N} \sum_{n_2=-N}^{N} \underbrace{E\left[X(n_1) X(n_2)\right]}_{R_{XX}(n_1, n_2)} \cdot e^{j\omega(n_1-n_2)}$$

- $R_{XX}(n_1, n_2)$ je autokorelacija diskretnog procesa $\boldsymbol{X}(n)$.
- Supstituiramo $n = n_1$ i $k = n_2 - n_1$, pa slijedi...

Gustoća spektra snage vremenski diskretnih slučajnih procesa

$$S\left(e^{j\omega}\right) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-N-n}^{N-n} \sum_{-N}^{N} R_{XX}(n, n+k) \cdot e^{-j\omega k}$$

- Za $N \to \infty$

$$S\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{-\infty}^{\infty} [\underbrace{\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^{N} R_{XX}(n, n+k) \cdot e^{j\omega k}}]$$

vremenska srednja vrijednost AKF procesa $\boldsymbol{X}(n)$

$$S\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{-\infty}^{\infty} A\left[R_{XX}(n, n+k)\right] \cdot e^{-j\omega k}$$

- Veza $S_{XX}(e^{j\omega})$ i $A[R_{XX}(n, n+k)]$: Fourierov red.

Gustoća spektra snage vremenski diskretnih slučajnih procesa

- Za stacionarne procese:

$$S\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(k) \cdot e^{-j\omega k}$$

$$R_{XX}(k) = \frac{1}{2N+1} \int_{-\pi}^{\pi} S\left(e^{j\omega}\right) d\omega$$

- Wiener – Khinchinove relacije za vremenski diskretne slučajne procese.
- Srednja snaga:

$$P_{XX} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-\infty}^{\infty} E\left[X^2(n)\right] \qquad P_{XX} = A\left\{E\left[X^2(n)\right]\right\}$$

Gustoća spektra snage vremenski diskretnih slučajnih procesa

- Srednja snaga P_{XX} integriranjem gustoće spektra:

$$P_{XX} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{XX}\left(e^{j\omega}\right) d\omega$$

$$S_{XX}\left(e^{j\omega}\right) = \lim_{N\to\infty} \frac{E[\left|X_N\left(e^{j\omega}\right)\right|^2]}{2N+1}$$

Slučajni proces u linearnom sustavu

Prof. dr. sc. Hrvoje Babić
Dr. sc. Damir Seršić
http://www.zesoi.fer.hr/teorijasignala

Odziv vremenski stalnog diskretnog linearnog sustava

- Izlaz diskretnog vremenski stalnog linearnog sustava dan je konvolucijskom sumacijom:

$$x_r(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y_r(n) \qquad y_r(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n-m)\, x_r(m),$$

- što je bio izraz za jednu realizaciju slučajnog procesa x_r, a za sve realizacije možemo napisati:

$$X(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow Y(n) \qquad Y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n-m)\, X(m).$$

Srednja (očekivana) vrijednost izlaza linearnog sustava

- U slučajnom procesu to vrijedi za svaku realizaciju, pa tako i za očekivanu vrijednost obje strane konvolucijske sumacije.

$$E[Y(n)] = E\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n-m)\, X(m)\right] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n-m)\, \underbrace{E[X(m)]}_{\overline{X}}$$

- Za stacionarne procese $E[X(m)]$ je konstanta, pa slijedi da je i $E[Y(n)]$ konstanta :

$$E[Y(n)] = \overline{Y} = \overline{X} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m).$$

Srednja (očekivana) vrijednost izlaza linearnog sustava

- Zanimljiv rezultat imamo i u Z–domeni.
- Kako je Z transformacija impulsnog odziva $h(m)$:

$$H(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)\, z^{-m}, \qquad \text{slijedi da je}$$

$$H(1) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m), \qquad \text{odnosno}$$

$$E[Y(n)] = \overline{Y} = \overline{X} \cdot H(1).$$

Autokorelacijska sekvencija

- Očekivana vrijednost $E[Y(n_1)\, Y(n_2)] = R_{yy}(n_1, n_2)$,

$$R_{yy}(n_1,n_2) = E\left[\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n_1-m)\, X(m)\right) \cdot Y(n_2)\right],$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n_1-m)\, E[X(m) \cdot Y(n_2)],$$

$$R_{yy}(n_1,n_2) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n_1-m)\, R_{xy}(m,n_2)$$

- Za stacionarni proces, uz supstituciju $k = n_2 - n_1$ i $l = n_2 - m$ slijedi:

$$R_{yy}(k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l-k)\, R_{xy}(l)$$

Autokorelacijska sekvencija

- Isto tako možemo dobiti:

$$E[Y(n_1) \cdot X(n_2)] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n_1-m)\, E[X(m) \cdot X(n_2)],$$

$$R_{yx}(n_1,n_2) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n_1-m)\, R_{xx}(m,n_2).$$

- Za stacionarni proces, uz supstituciju $k = n_2 - n_1$ i $l = n_2 - m$ slijedi:

$$R_{yx}(k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l-k)\, R_{xx}(l),$$

$$R_{yx} = h * R_{xx}.$$

Autokorelacijska sekvencija

- Kako je $R_{xy}(k) = R_{yx}(-k)$ i $R_{xx}(k) = R_{xx}(-k)$, vrijedi:

$$R_{xy}(k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(-l+k)\, R_{xx}(l), \qquad R_{xy}(k) = h(-k) * R_{xx}(k).$$

- Slično imamo:

$$R_{yy} = h * R_{xy},$$

$$R_{yy}(k) = \underbrace{h(k) * h(-k)}\, * R_{xx}(k).$$

Često se naziva autokorelacija impulsnog odziva r_{hh}.

$$R_{yy}(k) = r_{hh}(k) * R_{xx}(k).$$

Autokorelacijska sekvencija u frekvencijskoj domeni (F_{vd})

$$S_{YX}\left(e^{j\omega}\right)=H\left(e^{j\omega}\right)S_{XX}\left(e^{j\omega}\right),$$
$$S_{XY}\left(e^{j\omega}\right)=S_{YX}\left(e^{-j\omega}\right),$$
$$S_{XY}\left(e^{j\omega}\right)=H\left(e^{-j\omega}\right)S_{XX}\left(e^{j\omega}\right),$$
$$S_{YY}\left(e^{j\omega}\right)=H\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{-j\omega}\right)S_{XX}\left(e^{j\omega}\right),$$
$$S_{YY}\left(e^{j\omega}\right)=\underbrace{\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|^2}\,S_{XX}\left(e^{j\omega}\right).$$

- Transfer funkcija snage $R_{hh}(e^{j\omega})$.

Autokorelacijska sekvencija u Z domeni

$$S_{YX}(z)=H(z)S_{XX}(z),$$
$$S_{XY}(z)=S_{YX}\left(z^{-1}\right),$$
$$S_{XY}(z)=H\left(z^{-1}\right)S_{XX}(z),$$
$$S_{YY}(z)=H(z)H\left(z^{-1}\right)S_{XX}(z),$$
$$S_{YY}(z)=\underbrace{\left|H(z)\right|^2}\,S_{XX}(z).$$

- Transfer funkcija snage R_{hh}(z), ili transfer funkcija II reda.

Optimalni linearni sustavi

Prof. dr. sc. Hrvoje Babić

http://spus.zesoi.fer.hr

Optimalni linearni sustavi

- Analiza: $x, h \rightarrow y$

$$x \longrightarrow \boxed{h} \longrightarrow y$$

- Sinteza: $x, y \rightarrow h$

$$x \longrightarrow \boxed{h} \longrightarrow y$$

- Analiza je uvijek moguća, iako često složena.
- Sinteza ne daje uvijek ostvarivo rješenje.
- Na sustavu često postoje ograničenja.

Optimalni linearni sustavi

- Realni sustavi – konačnog reda, s raspodijeljenim parametrima, ...
- Često na temelju jednostavne logike znamo željeni odnos x i y, ali to nekad nije ostvarivo!
- Ako želimo odrediti sustav koji zadovoljava popratne uvjete odnosno ograničenja, preostaje nam optimizacija.
- Za linearne sustave to je optimizacija prijenosne funkcije ili impulsnog odziva.

Optimalni linearni sustavi

- Moramo znati:
  - ulazni signal, odnosno njegove specifikacije,
  - ograničenja ili popratne uvjete koje sustav treba zadovoljiti,
  - kriterij optimalnosti (koji sigurno uključuje izlazni signal).

Optimalni linearni sustavi

- Ulaz:
  - deterministički, stohastički ili mješavina.
  - stohastički: zadan funkcijom gustoće vjerojatnosti ili razdiobom, autokorelacijskom funkcijom, spektrom snage, …

Optimalni linearni sustavi

- Sustav:
  - ograničenja sustava.
  - zbijeni ili raspodijeljeni parametri.
  - linearan ili nelinearan.
  - kauzalan ili nekauzalan.
  - ostvariv ili neostvariv.
  - vremenski stalan ili promjenjiv.

Optimalni linearni sustavi

- Kriterij optimalnosti
  - je smislena mjera dobrote sustava.
  - Bitno svojstvo je da je to izraženo jednadžbama koje se dadu riješiti, analitički ili numerički.
  - Najčešće je to minimalizacija greške realnog od željenog (idealnog) sustava.
  - Može biti i maksimiranje korisnih komponenti signala prema nekorisnim (smetnjama).

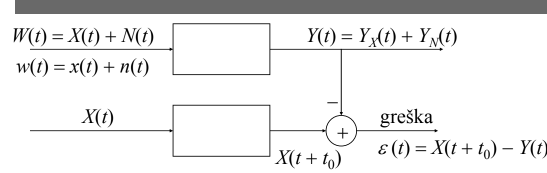
Optimalni linearni sustavi

- Mi ćemo pronaći nekauzalni sustav koji minimizira kvadratnu grešku između željenog slučajnog signala i šuma.
- Preciznije, tražimo optimalan sustav za procjenu ulaznog slučajnog signala u šumu, a dozvoljen je eventualni pomak signala.

Optimalan sustav u smislu najmanjeg kvadrata greške

- Sustav koji najbolje filtrira slučajni signal iz aditivnog šuma, uz eventualni vremenski pomak je Wienerov filtar.
- Sustav se projektira tako da njegov izlaz bude dobra ocjena prošle, sadašnje ili buduće trenutne vrijednosti signala.

Wienerov filtar

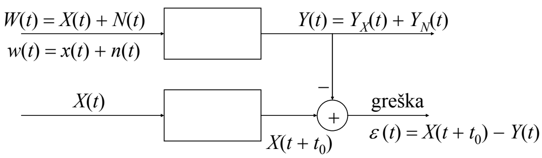


- prijenosna funkcija idealnog sustava

$$H_i(\omega) = e^{j\omega t_0} \quad \Rightarrow A(\omega) = 1\,; \Theta(\omega) = \omega t_0$$

vremenski pomak t_0

Wienerov filtar



- za $t_0 > 0$, $t_0 = 0$, $t_0 < 0 \rightarrow$ ocjenjuje se buduća, sadašnja ili prošla vrijednost signala.
- Mjera greške: integral kvadratne vrijednosti $\rightarrow$ predstavlja snagu procesa greške $\varepsilon(t)$.

Wienerov filtar

$$P_\varepsilon = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} [X(t+t_0) - Y(t)]^2 dt$$

Iskoristit ćemo Parsevalov teorem:

$$P_\varepsilon = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{\varepsilon\varepsilon}(\omega)d\omega,$$

gdje je $S_{\varepsilon\varepsilon}(\omega)$ gustoća spektra snage pogreške dana sa:

$$S_{\varepsilon\varepsilon}(\omega) = |H(\omega) - H_i(\omega)|^2 S_{XX}(\omega) + |H(\omega)|^2 S_{NN}(\omega).$$

Wienerov filtar

$$S_{\varepsilon\varepsilon}(\omega) = |H(\omega) - H_i(\omega)|^2 S_{XX}(\omega) + |H(\omega)|^2 S_{NN}(\omega)$$

$$H_i(\omega) = e^{j\omega t_0}$$

$$H(\omega) = A(\omega)\cdot e^{j\Theta(\omega)}$$

$S_{XX}(\omega)$ – gustoća spektra snage signala

$S_{NN}(\omega)$ – gustoća spektra snage šuma

Wienerov filtar

$$P_\varepsilon = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left|A(\omega)e^{j\Theta} - e^{j\omega t_0}\right|^2 S_{XX}(\omega) + A^2(\omega)S_{NN}(\omega)\right]d\omega$$

$$Ae^{j\Theta} - e^{j\omega t_0} = A(\cos\Theta + j\sin\Theta) - (\cos\omega t_0 + j\sin\omega t_0)$$

$$\left|Ae^{j\Theta} - e^{j\omega t_0}\right|^2 = (A\cos\Theta - \cos\omega t_0)^2 + (A\sin\Theta - \sin\omega t_0)^2$$

$$= A^2\cos^2\Theta - 2A\cos\Theta\cos\omega t_0 + \cos^2\omega t_0 +$$

$$+ A^2\sin^2\Theta - 2A\sin\Theta\sin\omega t_0 + \sin^2\omega t_0$$

Wienerov filtar

$$\left|Ae^{j\Theta} - e^{j\omega t_0}\right|^2 = A^2 + 1 - 2A\cos(\Theta - \omega t_0)$$

$$P_\varepsilon = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(A^2 + 1 - 2A\cos(\Theta - \omega t_0)\right)S_{XX} + A^2 S_{NN}\right]d\omega$$

- Tražimo minimalnu vrijednost integrala:

  $\rightarrow$ ispunjeno za maksimalnu vrijednost kosinusa:

$$\Theta - \omega t_0 = 0 \;\Rightarrow\; \Theta = \omega t_0.$$

Wienerov filtar

- Fazna karakteristika Wienerovog filtra je linearna:

$$\Theta(\omega) = \omega t_0,$$

- pa slijedi:

$$P_\varepsilon = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(A^2 + 1 - 2A\right)S_{XX} + A^2 S_{NN}\right]d\omega,$$

$$P_\varepsilon = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[A^2(S_{XX} + S_{NN}) - 2A\,S_{XX} + S_{XX}\right]d\omega.$$

- Za koji $A(\omega)$ integral poprima najmanju vrijednost?

Wienerov filtar

$$P_\varepsilon = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[A^2\left(S_{XX}+S_{NN}\right)-2AS_{XX}+S_{XX}\right]d\omega$$

- Nadopunjavanjem podintegralne funkcije do potpunog kvadrata dobivamo:

$$A^2\left(S_{XX}+S_{NN}\right)-2A\,S_{XX}+S_{XX}=$$

$$=\underbrace{\left(A\sqrt{S_{XX}+S_{NN}}-\frac{S_{XX}}{\sqrt{S_{XX}+S_{NN}}}\right)^2}_{\geq 0}+\underbrace{\frac{S_{XX}S_{NN}}{S_{XX}+S_{NN}}}_{\geq 0}\quad .$$

Wienerov filtar

- Najmanju vrijednost integrala dobivamo za:

$$A(\omega)\sqrt{S_{XX}+S_{NN}}-\frac{S_{XX}}{\sqrt{S_{XX}+S_{NN}}}=0,$$

$$A(\omega)=\frac{S_{XX}(\omega)}{S_{XX}(\omega)+S_{NN}(\omega)}.$$

- Dobili smo amplitudnu karakteristiku Wienerovog filtra.

Wienerov filtar

- Optimalna prijenosna funkcija koja najpovoljnije filtrira signal iz šuma je dakle:

$$H(\omega)=\frac{S_{XX}(\omega)}{S_{XX}(\omega)+S_{NN}(\omega)}e^{j\omega t_0}.$$

- Impulsni odziv je nekauzalan:

$$h(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{S_{XX}(\omega)}{S_{XX}(\omega)+S_{NN}(\omega)}e^{j\omega(t+t_0)}d\omega.$$

Wienerov filtar

- Nekauzalni odziv je neostvariv.
- Možemo ga aproksimirati ako u oba kanala stavimo dovoljno kašnjenje.
- Za dovoljno veliki t_0 nekauzalni dio odziva postaje zanemariv.
- Srednja vrijednost (očekivanje) kvadrata greške je određena ostatkom:

$$P_\varepsilon(\omega)=E\left[\varepsilon^2(t)\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{S_{XX}(\omega)S_{NN}(\omega)}{S_{XX}(\omega)+S_{NN}(\omega)}d\omega.$$

Diskusija ostatka

- Prethodnom relacijom definirali smo očekivanu kvadratnu pogrešku estimacije.
- To je najmanja moguća pogreška za sve linearne sustave.

Optimalna amplitudna karakteristika

- Promotrit ćemo optimalnu amplitudnu karakteristiku

$$A(\omega)=\frac{S_{XX}(\omega)}{S_{XX}(\omega)+S_{NN}(\omega)},$$

- za dva posebna slučaja:
  - šum mnogo veći od korisnog signala
  - korisni signal mnogo veći od šuma

Optimalna amplitudna karakteristika

a) $S_{NN}(\omega) >> S_{XX}(\omega)$

- Za bijeli šum vrijedi:

$$S_{NN}(\omega) = S_{NN}(0),$$

$$A(\omega) = \frac{S_{XX}(\omega)}{S_{XX}(\omega) + S_{NN}(0)} \approx \frac{S_{XX}(\omega)}{S_{NN}(0)}.$$

- Ako je šum velik, filtar mora imati pojas propuštanja jednak pojasu spektra gustoće snage signala .

Optimalna amplitudna karakteristika

- Filtar mora gušiti što više šuma, ali da propuštanje korisnog signala bude zadovoljavajuće.
- Kvalitetu signala koji prolazi određuje omjer:

$$\frac{S_{XX}(\omega)}{S_{XX}(0)}.$$

- Što je taj omjer veći, veći je i šum koji prođe.

Optimalna amplitudna karakteristika

b) $S_{NN}(\omega) << S_{XX}(\omega)$

- Za slabi šum vrijedi:

$$A(\omega) = \frac{S_{XX}(\omega)}{S_{XX}(\omega) + S_{NN}(0)} \approx 1.$$

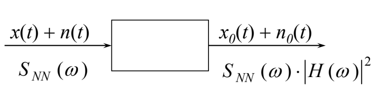
- Ako je šum slab, optimalno je da filtar ima široki pojas propuštanja.

Prilagođeni filtar

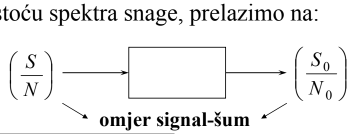
- Upotrebljava se u digitalnim komunikacijama, mjernoj instrumentaciji, digitalnoj obradi signala, detekciji radarskih impulsa, u nuklearnoj tehnici (određivanje zračenja), ...
- Prilagođeni filtar treba identificirati pulsni signal u prisustvu šuma.

Prilagođeni filtar

- Prilagođeni filtar je određen oblikom signala kojeg želimo filtrirati.



- Kako ne znamo oblik šuma, već samo njegovu gustoću spektra snage, prelazimo na:



Prilagođeni filtar

- Omjer signal-šum na izlazu filtra mora biti veći nego na ulazu.

Def. :

$$\left(\frac{S}{N}\right) = \frac{|X(t_0)|^2}{E\{N(t)\}}$$

vršna vrijednost snage determinističkog signala

srednja vrijednost snage šuma

Prilagođeni filtar

- Deterministički signal na izlazu određen je inverznom Fourierovom transformacijom:

$$x_0(t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) H(\omega) e^{j\omega t_0}\, d\omega.$$

- Srednja vrijednost snage šuma na izlazu filtra određena je sa:

$$E\{N_0(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{NN}(\omega) \left| H(\omega) \right|^2 d\omega.$$

Prilagođeni filtar

$\Rightarrow$

$$\left(\frac{S_0}{N_0} \right) = \frac{\left| \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) H(\omega) e^{j\omega t_0}\, d\omega \right|^2}{\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} S_{NN}(\omega) \left| H(\omega) \right|^2 d\omega}$$

- Omjer signal-šum na izlazu mora biti maksimalan.

$\Rightarrow$ tražimo maksimum.

Prilagođeni filtar

- Iskoristit ćemo Schwartzovu nejednakost:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) B(\omega)\, d\omega \right|^2 \le \int_{-\infty}^{\infty} \left| A(\omega) \right|^2 d\omega \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left| B(\omega) \right|^2 d\omega.$$

- Znak jednakosti vrijedi samo ako je:

$$B(\omega) = \mathrm{c} \cdot A^*(\omega),$$

- gdje je c realna konstanta.

Prilagođeni filtar

- Schwartzovu nejednakost primjenjujemo na izraz u brojniku, pri čemu ćemo odabrati:

$$A(\omega) = H(\omega) \sqrt{S_{NN}(\omega)},$$

$$B(\omega) = \frac{X(\omega) e^{j\omega t_0}}{2\pi \sqrt{S_{NN}(\omega)}}.$$

- Pri tome nas drugi korijen iz gustoće spektra snage ne treba brinuti jer je on uvijek pozitivna veličina.

Prilagođeni filtar

$\Rightarrow$

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) \sqrt{S_{NN}(\omega)} \cdot \frac{X(\omega) e^{j\omega t_0}}{2\pi \sqrt{S_{NN}(\omega)}}\, d\omega \right|^2 \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| H(\omega) \right|^2 S_{NN}(\omega)\, d\omega \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left| X(\omega) \right|^2}{S_{NN}(\omega)}\, d\omega$$

krati nazivnik

Prilagođeni filtar

- Pa je omjer signal-šum na izlazu određen relacijom:

$$\left(\frac{S_0}{N_0} \right) \le \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left| X(\omega) \right|^2}{S_{NN}(\omega)}\, d\omega.$$

- Želimo maksimum, tj. da vrijedi jednakost:

$$\left(\frac{S_0}{N_0} \right)_{\max} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left| X(\omega) \right|^2}{S_{NN}(\omega)}\, d\omega.$$

Prilagođeni filtar

- Kao što je već navedeno, jednakost vrijedi za:

$$B(\omega) = \mathrm{c} \cdot A^*(\omega),$$

- pa slijedi:

$$\frac{X(\omega)e^{j\omega t_0}}{2\pi\sqrt{S_{NN}(\omega)}} = \mathrm{c} \cdot H^*(\omega)\sqrt{S_{NN}(\omega)}.$$

Prilagođeni filtar

- Pa je optimalna prijenosna funkcija prilagođenog filtra dana sa:

$$H_{opt}{}^*(\omega) = \frac{X(\omega)e^{j\omega t_0}}{2\pi \cdot \mathrm{c} \cdot S_{NN}(\omega)},$$

- odnosno:

$$H_{opt}(\omega) = \frac{X^*(\omega)e^{-j\omega t_0}}{2\pi \cdot \mathrm{c} \cdot S_{NN}(\omega)}.$$

Prilagođeni filtar

- Za bijeli šum vrijedi :

$$S_{XX}(\omega) = konst.$$

$$\Rightarrow \quad H_{opt}(\omega) = \mathrm{k} \cdot X^*(\omega)e^{-j\omega t_0}.$$

- Kod bijelog šuma je $H_{opt}(\omega)$ proporcionalan prigušenom konjugiranom spektru signala.
- Iz oblika optimalne prijenosne funkcije prilagođenog filtra vidi se da su više frekvencije jače prigušene od nižih.

Prilagođeni filtar

- Za neku kompleksnu funkciju

$$f(t) = f_r(t) + jf_i(t),$$

- je njen Fourierov spektar dan sa:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[f_r(t) + jf_i(t)\right] \cdot e^{-j\omega t}\, dt,$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[f_r(t) + jf_i(t)\right] \cdot \left[\cos(\omega t) - j\sin(\omega t)\right] dt.$$

Prilagođeni filtar

$$F(\omega) = F_r(\omega) + jF_i(\omega)$$

$$F_r(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[f_r(t)\cos(\omega t) + f_i(t)\sin(\omega t)\right] dt$$

$$F_i(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[f_i(t)\cos(\omega t) - f_r(t)\sin(\omega t)\right] dt$$

Prilagođeni filtar

- Za realne funkcije vrijedi da je

$$f_i(t) = 0,$$

- pa slijedi da je:

$$F_r(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_r(t)\cos(\omega t)\, dt,$$

$$F_i(\omega) = -\int_{-\infty}^{\infty} f_r(t)\sin(\omega t)\, dt.$$

Prilagođeni filtar

- Sada je vidljivo da za realne funkcije vrijedi da je realni dio njihovog spektra parna funkcija od ω, a imaginarni neparna.
- Odnosno vrijedi:

$$F_r(-\omega) = F_r(\omega),$$

$$F_i(-\omega) = -F_i(\omega).$$

- Kako mi u realnom svijetu radimo isključivo sa realnim funkcijama, iskoristit ćemo navedene te dvije relacije.

Prilagođeni filtar

- Za optimalnu prijenosnu funkciju prilagođenog filtra u slučaju bijelog šuma tada vrijedi:

$$\begin{aligned} H_{opt}(\omega) &= \mathrm{k} \cdot X^*(\omega) e^{-j\omega t_0}, \\ &= \mathrm{k} \cdot \left[X_r(\omega) + jX_i(\omega)\right]^* e^{-j\omega t_0}, \\ &= \mathrm{k} \cdot \left[X_r(\omega) - jX_i(\omega)\right] e^{-j\omega t_0}, \\ &= \mathrm{k} \cdot \left[X_r(-\omega) + jX_i(-\omega)\right] e^{-j\omega t_0}, \\ &= \mathrm{k} \cdot X(-\omega) e^{-j\omega t_0}. \end{aligned}$$

Prilagođeni filtar

$$H_{opt}(\omega) = \mathrm{k} \cdot X(-\omega) e^{-j\omega t_0}$$

$$H_{opt}(-\omega) = \mathrm{k} \cdot X(\omega) e^{j\omega t_0}$$

- To znači da će impulsni odziv prilagođenog filtra biti dan sa:

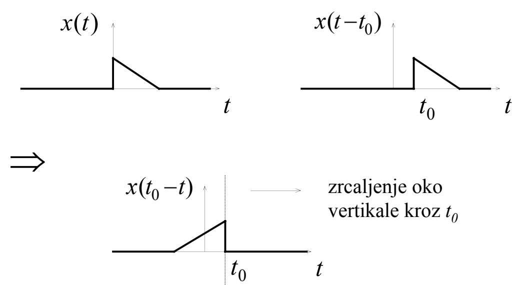
$$h_{opt}(-t) = \mathrm{k} \cdot x(t + t_0),$$

- odnosno:

$$h_{opt}(t) = \mathrm{k} \cdot x(t_0 - t).$$

Prilagođeni filtar

- Primjer:



Odziv prilagođenog filtra

- Odziv prilagođenog filtra određen je konvolucijskim integralom:

$$\begin{aligned} y_{opt}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h_{opt}(t-\tau)\, d\tau, \\ &= \mathrm{k} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, x(t_0 - (t-\tau))\, d\tau, \\ &= \mathrm{k} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, x(t_0 - (t-\tau))\, d\tau. \end{aligned}$$

Odziv prilagođenog filtra

$$y_{opt}(t) = \mathrm{k} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, x(t_0 - t + \tau)\, dt$$

- Što za $t = t_0$ iznosi:

$$y_{opt}(t) = \mathrm{k} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)^2\, d\tau,$$

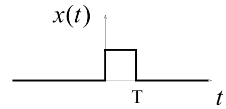
$y_{opt}(t) = \mathrm{k} \cdot E_X \Rightarrow$ energija ulaznog signala

Odziv prilagođenog filtra

- Odziv u trenutku $t=t_0$ proporcionalan je energiji ulaznog signala.

Primjer prilagođenog filtra

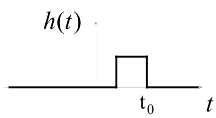
- Zadatak: Odrediti prilagođeni filtar za detekciju pravokutnog impulsa.



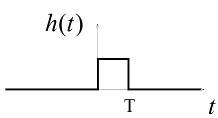
- Impulsni odziv prilagođenog filtra je da sa:

$$h_{opt}(t) = \mathrm{k} \cdot x(t_0 - t).$$

Primjer prilagođenog filtra

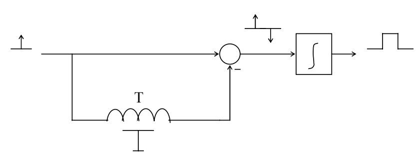


- Uzmemo li da je $t_0 = T$, dobivamo:



Primjer prilagođenog filtra

- Realizacija takvog impulsnog odziva:



linija za kašnjenje

Primjer prilagođenog filtra

- Detekcija signala: