

Osnove slučajnih procesa



Prof. dr. sc. Sven Lončarić
Prof. dr. sc. Hrvoje Babić
Doc. dr. sc. Damir Seršić

Literatura

- WEB: <http://ts.zesoi.fer.hr>
- H. Babić, S. Lončarić, D. Seršić: *Slučajni procesi u sustavima*, <http://spus.zesoi.fer.hr>, 2002.
- P. Z. Peebles: *Probability, Random Variables and Random Signal Principles, 3rd ed.*, McGraw-Hill, 1993.
- D.G.Manolakis, V.K.Ingle, S.M.Kogon: *Statistical and Adaptive Signal Processing*, McGraw-Hill, 2000
- M.H. Hayes: *Statistical digital signal processing and modeling*, John Wiley & Sons, 1996.

Uvod

- Neke su pojave po prirodi determinističke, a neke su stohastičke.
- Često se i složene determinističke pojave tretiraju kao stohastičke jer bi deterministički problem bio prekomplikiran za modeliranje.
- U brojnim primjenama (kompresija, prijenos, ...) eksploatiraju se statistička svojstva signala i to:
 - jedne pojave (realizacije),
 - skupa srodnih signala.
- Druga varijanta vodi do koncepta slučajnog procesa.

Koncept slučajnog procesa

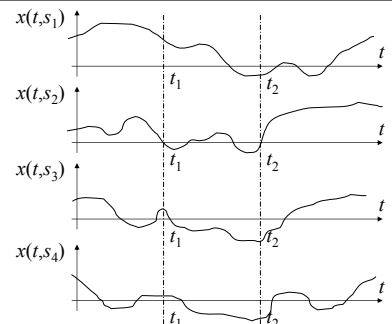
- Slučajni proces, engl. *random process* ili *stochastic process*.
- Koncept slučajnog procesa dobiva se iz koncepta slučajne varijable uz dodavanje vremenske varijable.

Koncept slučajnog procesa

- Slučajna varijabla je preslikavanje koje svakom ishodu eksperimenta s dodjeljuje broj $x(s)$, a koji se zove realizacija slučajne varijable.
- Slučajni proces je preslikavanje koje svakom ishodu eksperimenta s dodjeljuje funkciju vremena $x(t, s)$ – jednu realizaciju.
- Obitelj svih takvih funkcija $x(t, s)$ zove se slučajni proces i označava se kao $\mathbf{X}(t, s)$ ili kraće $\mathbf{X}(t)$.

Koncept slučajnog procesa

- Za $t = t_1$ $\mathbf{X}(t_1, s)$ je slučajna varijabla



Klasifikacije slučajnih procesa

- Diskretni i kontinuirani slučajni procesi
 - slobodna i/ili zavisna varijabla mogu biti iz kontinuiranog ili prebrojivog skupa.
- Deterministički i nedeterministički
 - pojedina realizacija može biti predvidiva ili nepredvidiva.
- Stacionarni i nestacionarni
 - ovisno o promjenjivosti statističkih svojstava u vremenu.

Funkcije distribucije slučajnog procesa

- U određenom trenutku t , $\mathbf{X}(t)$ je slučajna varijabla koja ima funkciju distribucije prvog reda definiranu izrazom:

$$F_X(x, t) = P(\mathbf{X}(t) \leq x)$$

- To je funkcija distribucije prvog reda.
- Za dvije slučajne varijable $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}(t_1)$ i $\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}(t_2)$ funkcija distribucije drugog reda je:

$$F_X(x_1, x_2, t_1, t_2) = P(\mathbf{X}(t_1) \leq x_1, \mathbf{X}(t_2) \leq x_2)$$

Funkcija distribucije N -tog reda

- Za N slučajnih varijabli $\mathbf{X}_i = \mathbf{X}(t_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$ funkcija distribucije N -tog reda slučajnog procesa $\mathbf{X}(t)$ definirana je izrazom:

$$\begin{aligned} F_X(x_1, \dots, x_N, t_1, \dots, t_N) &= \\ &= P(\mathbf{X}(t_1) \leq x_1, \dots, \mathbf{X}(t_N) \leq x_N) \end{aligned}$$

Funkcije gustoće vjerojatnosti slučajnog procesa

- Funkcija gustoće vjerojatnosti prvog reda slučajnog procesa $\mathbf{X}(t)$ definirana je izrazom:
$$f_X(x, t) = \frac{dF_X(x, t)}{dx}$$
- Funkcije gustoće vjerojatnosti drugog i N -tog reda:

$$\begin{aligned} f_X(x_1, x_2, t_1, t_2) &= \frac{\partial^2 F_X(x_1, x_2, t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \\ f_X(x_1, \dots, x_N, t_1, \dots, t_N) &= \frac{\partial^N F_X(x_1, \dots, x_N, t_1, \dots, t_N)}{\partial x_1 \dots \partial x_N} \end{aligned}$$

Definicija stacionarnosti

- Definicija: stohastički proces $\mathbf{X}(t)$ je stacionaran ako za svaki $n \in N$, za svaki izbor trenutaka t_1, \dots, t_n i za svaki $u \in \mathbf{R}$ slučajne varijable $\mathbf{X}(t_1), \dots, \mathbf{X}(t_n)$ i slučajne varijable $\mathbf{X}(t_1+u), \dots, \mathbf{X}(t_n+u)$ imaju jednake funkcije distribucije n -tog reda.
- Definicija: slučajni proces koji nije stacionaran zove se nestacionaran slučajni proces.

Definicija statističke nezavisnosti

- Dva procesa $\mathbf{X}(t)$ i $\mathbf{Y}(t)$ su statistički nezavisni ako je grupa slučajnih varijabli $\mathbf{X}(t_1), \dots, \mathbf{X}(t_N)$ nezavisna od grupe $\mathbf{Y}(t_1'), \dots, \mathbf{Y}(t_N')$ za bilo koji izbor trenutaka $t_1, \dots, t_N, t_1', \dots, t_N'$.
- Nezavisnost zahtijeva da vrijedi:

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_N, t_1, \dots, t_N, t_1', \dots, t_N') &= \\ &= f_X(x_1, \dots, x_N, t_1, \dots, t_N) f_Y(y_1, \dots, y_N, t_1', \dots, t_N') \end{aligned}$$

Stacionarnost prvog reda

- Definicija: Slučajni proces je stacionaran prvog reda ako se funkcija gustoće vjerojatnosti prvog reda ne mijenja s vremenom:

$$f_X(x, t) = f_X(x, t + \Delta t)$$

za svaki t i Δt .

- To znači da su i svi statistički deskriptori prvog reda (srednja vrijednost, varijanca i ostali) nepromjenjivi u vremenu.

Stacionarnost drugog reda

- Definicija: slučajni proces je stacionaran drugog reda ako vrijedi

$$f_X(x_1, x_2, t_1, t_2) = f_X(x_1, x_2, t_1 + \Delta t, t_2 + \Delta t)$$

- Stacionarnost drugog reda implicira stacionarnost prvog reda, što se vidi iz:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy$$

Stacionarnost drugog reda

- Ako u izrazu za definiciju stacionarnosti

$$f_X(x_1, x_2, t_1, t_2) = f_X(x_1, x_2, t_1 + \Delta t, t_2 + \Delta t)$$

- odaberemo npr. $\Delta t = -t_1$, tada dobivamo

$$f_X(x_1, x_2, t_1, t_2) = f_X(x_1, x_2, 0, t_2 - t_1)$$

- Dakle vidi se da f_X ovisi samo o razlici $t_2 - t_1$

Korelacija slučajnih varijabli

- Promatramo korelaciju dvaju slučajnih varijabli $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}(t_1)$ i $\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}(t_2)$ definiranu izrazom

$$E[\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_2] = E[\mathbf{X}(t_1) \mathbf{X}(t_2)]$$

- Vidi se da ova korelacija općenito ovisi o trenucima t_1 i t_2 .

Autokorelacijska funkcija slučajnog procesa

- Definicija: autokorelacijska funkcija slučajnog procesa $\mathbf{X}(t)$ definirana je izrazom:

$$R_{XX}(t_1, t_2) = E[\mathbf{X}(t_1) \mathbf{X}(t_2)]$$

- Dakle autokorelacijska funkcija jednaka je jednostavnoj korelaciji dviju susjednih slučajnih varijabli.

Autokorelacijska funkcija slučajnog procesa

- Budući da korelacija dviju slučajnih varijabli ovisi o funkciji gustoće drugog reda, slijedi da autokorelacijska funkcija stacionarnog procesa drugog reda ovisi samo o razlici $\tau = t_2 - t_1$.

$$R_{XX}(t_1, t_1 + \tau) = E[\mathbf{X}(t_1) \mathbf{X}(t_1 + \tau)] = R_{XX}(\tau)$$

Stacionarnost u širem smislu

- Mnogi praktični inženjerski problemi traže analizu autokorelacijske funkcije i srednje vrijednosti slučajnog procesa.
- Rješenja tih problema su jednostavnija kada ove veličine ne ovise o apsolutnom vremenu.
- Naravno, ako je proces stacionaran drugog reda autokorelacijska funkcija i srednja vrijednost ne ovise o vremenu, no to je prestroj uvjet koji se često ne da provjeriti u praksi.

Stacionarnost u širem smislu

- Zato se uvodi pojam stacionarnosti u širem smislu.
- Definicija: proces je stacionaran u širem smislu ako vrijedi:

$$E[\mathbf{X}(t)] = \text{konst}$$

$$E[\mathbf{X}(t)\mathbf{X}(t + \tau)] = R_{xx}(\tau)$$

Proces koji je stacionaran drugog reda je stacionaran i u širem smislu.

- Obrat ne vrijedi.

Primjer

- Zadan je slučajni proces

$$\mathbf{X}(t) = A \cos(\omega_0 t + \Theta)$$

gdje su A i ω_0 konstante, a Θ je uniformno distribuirana slučajna varijabla na intervalu $(0, 2\pi)$.

- Da bi ispitali da li je ovaj slučajni proces stacionaran u širem smislu odredit ćemo njegovu srednju vrijednost i autokorelacijsku funkciju.

Primjer: Srednja vrijednost

- Srednja vrijednost:

$$E[\mathbf{X}(t)] = \int_0^{2\pi} A \cos(\omega_0 t + \Theta) \frac{1}{2\pi} d\Theta = 0$$

- Dakle vidi se da srednja vrijednost ne ovisi o vremenu t .

Primjer: Autokorelacijska funkcija

$$\begin{aligned} R_{xx}(t, t + \tau) &= E[A \cos(\omega_0 t + \Theta) A \cos(\omega_0 t + \omega_0 \tau + \Theta)] \\ &= \frac{A^2}{2} E[\cos(\omega_0 \tau) + \cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau + 2\Theta)] \\ &= \frac{A^2}{2} \cos(\omega_0 \tau) + \frac{A^2}{2} \underbrace{E[\cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau + 2\Theta)]}_0 \\ &= \frac{A^2}{2} \cos(\omega_0 \tau) = R_{xx}(\tau) \end{aligned}$$

- Dakle autokorelacijska funkcija ovisi samo o τ .

Primjer

- Pokazali smo da u ovom primjeru
 - srednja vrijednost slučajnog procesa $\mathbf{X}(t)$ ne ovisi o vremenu, a
 - autokorelacijska funkcija ovisi samo o razlici vremena τ a ne i o apsolutnom vremenskom trenutku t .
- Slijedi da je proces $\mathbf{X}(t)$ stacionaran u širem smislu.

Vremensko usrednjavanje

- Definicija: vremensko usrednjavanje (ili prosjek) neke veličine definiran je kao:

$$A[\cdot] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [\cdot] dt$$

- Notacija A je analogna notaciji E za statistički prosjek.
- A je vremenski prosjek (engl. *time-average*).

Vremenska srednja vrijednost i autokorelacija

- Vremenska srednja vrijednost definirana je izrazom:

$$\bar{x} = A[x(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt$$

- Vremenska autokorelacijska funkcija definirana je izrazom:

$$R_{xx}(\tau) = A[x(t)x(t+\tau)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau) dt$$

Diskusija vremenskog usrednjavanja

- Za jednu određenu realizaciju $x(t)$ slučajnog procesa izrazi za vremensku srednju vrijednost i vremensku autokorelacijsku funkciju (za neki fiksni τ) daju dva broja.

Diskusija vremenskog usrednjavanja

- Za jednu realizaciju $x(t)$ vremenska srednja vrijednost je broj, a vremensku autokorelacijsku funkciju funkcija vremena.
- Za sve funkcije realizacije vremenska srednja vrijednost i vremenska autokorelacijska funkcija postaju slučajne varijable.
- Može se vidjeti da ako je X stacionaran proces u širem smislu vrijedi:

$$E[\bar{x}] = E[\mathbf{X}(t)] = \bar{\mathbf{X}} \\ E[R_{xx}(\tau)] = R_{xx}(\tau)$$

Ergodičnost

- Definicija: slučajni proces je ergodičan ako je vremensko usrednjavanje jednako statističkom usrednjavanju.
- U praksi često možemo pretpostaviti da je proces ergodičan, a nekad nemamo drugog izbora (imamo samo jednu realizaciju).

Auto-korelacijska funkcija

- Definicija: auto-korelacijska funkcija slučajnog procesa $\mathbf{X}(t)$ je korelacija dvaju slučajnih varijabli $\mathbf{X}(t)$ i $\mathbf{X}(t+\tau)$

$$R_{xx}(t, t+\tau) = E[\mathbf{X}(t)\mathbf{X}(t+\tau)]$$

Svojstva

- Za procese koji su stacionarni u širem smislu

$$R_{XX}(\tau) = E[\mathbf{X}(t)\mathbf{X}(t + \tau)]$$

- Tada vrijedi

$$|R_{XX}(\tau)| \leq R_{XX}(0)$$

$$R_{XX}(-\tau) = R_{XX}(\tau)$$

$$R_{XX}(0) = E[\mathbf{X}^2(t)]$$

Kros-korelacijska funkcija

- Definicija: kros-korelacijska funkcija dvaju slučajnih procesa $\mathbf{X}(t)$ i $\mathbf{Y}(t)$ definirana je kao

$$R_{XY}(t, t + \tau) = E[\mathbf{X}(t)\mathbf{Y}(t + \tau)]$$

- Ako su $\mathbf{X}(t)$ i $\mathbf{Y}(t)$ zajednički stacionarni u širem smislu onda je

$$R_{XY}(\tau) = E[\mathbf{X}(t)\mathbf{Y}(t + \tau)]$$

Ortogonalni slučajni procesi

- Definicija: Ako za dva slučajna procesa $\mathbf{X}(t)$ i $\mathbf{Y}(t)$ vrijedi

$$R_{XY}(t, t + \tau) = 0$$

onda su $\mathbf{X}(t)$ i $\mathbf{Y}(t)$ ortogonalni slučajni procesi.

Nezavisni slučajni procesi

- Definicija: ako su dva slučajna procesa $\mathbf{X}(t)$ i $\mathbf{Y}(t)$ statistički nezavisna onda vrijedi

$$R_{XY}(t, t + \tau) = E[\mathbf{X}(t)]E[\mathbf{Y}(t + \tau)]$$

- Ako su dva procesa još i stacionarni u širem smislu onda je

$$R_{XY}(t, t + \tau) = \overline{\mathbf{X}\mathbf{Y}} = \text{konst}$$

Svojstva kros-korelacijskih funkcija

- Kros-korelacijske funkcije imaju slijedeća svojstva

$$R_{XY}(-\tau) = R_{YX}(\tau)$$

$$|R_{XY}(\tau)| \leq \sqrt{R_{XX}(0)R_{YY}(0)}$$

$$|R_{XY}(\tau)| \leq \frac{1}{2}[R_{XX}(0) + R_{YY}(0)]$$

Auto-kovarijancijska funkcija

- Definicija: auto-kovarijancijska funkcija slučajnog procesa $\mathbf{X}(t)$ definirana je kao

$$\begin{aligned} C_{XX}(t, t + \tau) &= \\ &= E[\{\mathbf{X}(t) - E[\mathbf{X}(t)]\}\{\mathbf{X}(t + \tau) - E[\mathbf{X}(t + \tau)]\}] \end{aligned}$$

- Ovaj izraz može se pisati i kao

$$\begin{aligned} C_{XX}(t, t + \tau) &= \\ &= R_{XX}(t, t + \tau) - E[\mathbf{X}(t)]E[\mathbf{X}(t + \tau)] \end{aligned}$$

Kros-kovarijancijska funkcija

- Definicija: Kros-kovarijancijska funkcija dvaju slučajnih procesa $\mathbf{X}(t)$ i $\mathbf{Y}(t)$ definirana je izrazom:

$$C_{XY}(t, t + \tau) = E[\{\mathbf{X}(t) - E[\mathbf{X}(t)]\} \{\mathbf{Y}(t + \tau) - E[\mathbf{Y}(t + \tau)]\}]$$

- Izraz se može pisati i u slijedećoj formi

$$C_{XY}(t, t + \tau) = R_{XY}(t, t + \tau) - E[\mathbf{X}(t)]E[\mathbf{Y}(t + \tau)]$$

Slučaj stacionarnih procesa

- Za slučajne procese koji su zajednički stacionarni u širem smislu vrijede jednostavniji izrazi za auto-kovarijancijsku i kros-kovarijancijsku funkciju:

$$C_{XX}(\tau) = R_{XX}(\tau) - \bar{\mathbf{X}}^2$$

$$C_{XY}(\tau) = R_{XY}(\tau) - \bar{\mathbf{X}}\bar{\mathbf{Y}}$$

Varijanca slučajnog procesa

- Definicija: varijanca slučajnog procesa je vrijednost auto-kovarijancijske funkcije za $\tau = 0$:

$$\sigma_x^2 = C_{XX}(t, t)$$

- Za proces koji je stacionaran u širem smislu vrijedi:

$$\sigma_x^2 = C_{XX}(t, t) = R_{XX}(0) - \bar{\mathbf{X}}^2 = \text{konst}$$

Nekorelirani slučajni procesi

- Definicija: Za dva slučajna procesa $\mathbf{X}(t)$ i $\mathbf{Y}(t)$ ako vrijedi

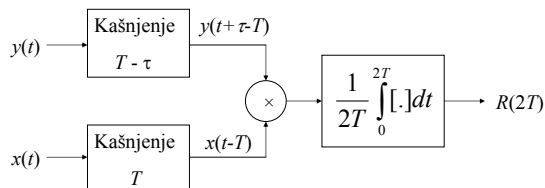
$$C_{XY}(t, t + \tau) = 0$$

onda su procesi nekorelirani.

Mjerenje korelacijske funkcije

- U praksi ne možemo nikada izmjeriti prave korelacijske funkcije dvaju procesa $\mathbf{X}(t)$ i $\mathbf{Y}(t)$ zato jer nikada nemamo sve realizacije procesa.
- Jedini način u tom slučaju je mjerenje vremenskim usrednjavanjem u dovoljno dugom intervalu i uz pretpostavku da se radi o ergodičnom procesu.

Mjerenje kros-korelacijske funkcije



Blok dijagram sustava za mjerenje kros-korelacijske funkcije

Mjerenje kros-korelacijske funkcije

- Ako u trenutku $t = 0$ započinje integracija i ako promatramo izlaz $R(t)$ u trenutku $t = 2T$ onda

$$R(2T) = \frac{1}{2T} \int_0^{2T} x(t-T)y(t-T+\tau)dt$$

$$= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t')y(t'+\tau)dt'$$

- Dakle za $T \gg \tau$ vrijedi $R(2T) \approx R_{xy}(\tau) = R_{yx}(\tau)$

Mjerenje auto-korelacijske funkcije

- Ako na prethodnom blok dijagramu spojimo ulaze onda možemo mjeriti auto-korelacijsku funkciju slučajnog procesa pod pretpostavkom da je proces ergodičan.

Primjer

- Treba izmjeriti autokorelacijsku funkciju procesa iz ranijeg primjera

$$\mathbf{X}(t) = A \cos(\omega_0 t + \Theta)$$

gdje je Θ uniformnog distribuirana slučajna varijabla u intervalu $(0, 2\pi)$.

Primjer

- Izlaz sustava s blok dijagrama dan je izrazom:

$$R(2T) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T A^2 \cos(\omega_0 t + \Theta) \cos(\omega_0 t + \Theta + \omega_0 \tau) dt$$

$$= \frac{A^2}{4T} \int_{-T}^T [\cos(\omega_0 \tau) + \cos(2\omega_0 t + 2\Theta + \omega_0 \tau)] dt$$

gdje je Θ jedna realizacija slučajne varijable Θ .

Primjer

- Može se dakle vidjeti da je

$$R(2T) = R_{xx}(\tau) + \varepsilon(\tau)$$

gdje je

$$R_{xx}(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(\omega_0 \tau)$$

prava vrijednost auto-korelacijske funkcije kao što je izvedeno u ranijem primjeru.

Primjer

- Drugi pribrojnik

$$\varepsilon(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(\omega_0 \tau + 2\Theta) \frac{\sin(2\omega_0 T)}{2\omega_0 T}$$

je iznos pogreške koji ovisi o T .

- Ako pogreška mora biti $20\times$ manja od najveće vrijednosti autokorelacijske funkcije onda

$$|\varepsilon(\tau)| \leq 0.05 R_{xx}(0) \Leftrightarrow T \geq \frac{10}{\omega_0}$$

Gaussov slučajni proces

- Definicija: Neka je za slučajni proces $X(t)$ definirano N slučajnih varijabli $\mathbf{X}_1=\mathbf{X}(t_1)$, $\mathbf{X}_2=\mathbf{X}(t_2)$, ..., $\mathbf{X}_N=\mathbf{X}(t_N)$ koje su definirane u N vremenskih trenutaka t_1, t_2, \dots, t_N .
- Ako su za bilo koji N i trenutke t_1, t_2, \dots, t_N ove varijable zajednički Gaussove, tj. ako imaju gustoću vjerojatnosti N -tog reda danu izrazom

Gaussov slučajni proces

$$f_X(x_1, \dots, x_N, t_1, \dots, t_N) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{C}_x^{-1} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})\right\}}{\sqrt{(2\pi)^N |\mathbf{C}_x|}}$$

gdje je vektor $\mathbf{x} = [x_1 \dots x_N]^T$

te $\bar{\mathbf{x}} = [\bar{x}_1 \dots \bar{x}_N]^T$

vektor srednjih vrijednosti, a

Gaussov slučajni proces

$$\mathbf{C}_x = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1N} \\ \vdots & & & \vdots \\ C_{N1} & C_{N2} & \dots & C_{NN} \end{bmatrix}$$

kovarijancijska matrica čiji su elementi

$$C_{ij} = E[(\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}}_i)(\mathbf{X}_j - \bar{\mathbf{X}}_j)] = C_{xx}(t_i, t_k)$$

$$\bar{\mathbf{X}}_i = E[\mathbf{X}_i] = E[\mathbf{X}(t_i)]$$

Gaussov slučajni proces

- Iz definicije se vidi da je Gaussov slučajni proces određen s vektorom srednjih vrijednosti i kovarijancijskom matricom.
- Budući da vrijedi

$$C_{xx}(t_i, t_k) = R_{xx}(t_i, t_k) - E[\mathbf{X}(t_i)]E[\mathbf{X}(t_k)]$$

slijedi da je specifikacija Gaussovog procesa moguća pomoću auto-korelacijske funkcije R_{xx} slučajnog procesa i srednjih vrijednosti.

Gaussov slučajni proces

- Ako Gaussov proces nije stacionaran onda srednje vrijednosti i auto-korelacijska funkcija ovise o vremenu.

Gaussov slučajni proces

- Ako je Gaussov proces stacionaran u širem smislu srednja vrijednost je konstantna

$$\bar{\mathbf{X}}_i = E[\mathbf{X}(t_i)] = \text{konst.}$$

dok auto-kovarijancijska i auto-korelacijska funkcija ovise samo o razlikama vremena, a ne o apsolutnom vremenu:

$$C_{xx}(t_i, t_k) = C_{xx}(t_k - t_i)$$

$$R_{xx}(t_i, t_k) = R_{xx}(t_k - t_i)$$

Primjer

- Neka je dan Gaussov slučajni proces koji je stacionaran u širem smislu i koji ima sljedeću srednju vrijednost i auto-korelacijsku funkciju:

$$\bar{\mathbf{X}} = 4$$

$$R_{xx}(\tau) = 25e^{-3|\tau|}$$

- Treba odrediti funkciju gustoće vjerojatnosti trećeg reda za slučajne varijable

$$\mathbf{X}(t_i), \quad i = 1, 2, 3, \quad t_i = t_0 + \frac{i-1}{2}$$

Primjer

$$t_k - t_i = \frac{k-i}{2}, \quad i, k = 1, 2, 3$$

$$\Rightarrow R_{xx}(t_k - t_i) = 25e^{-3\frac{|k-i|}{2}}$$

$$\Rightarrow C_{xx}(t_k - t_i) = 25e^{-3\frac{|k-i|}{2}} - 16$$

Primjer

- Elementi kovarijancijske matrice dani su kao:

$$\mathbf{C}_x = \begin{bmatrix} 25-16 & 25e^{\frac{3}{2}}-16 & 25e^{\frac{6}{2}}-16 \\ 25e^{\frac{3}{2}}-16 & 25-16 & 25e^{\frac{3}{2}}-16 \\ 25e^{\frac{6}{2}}-16 & 25e^{\frac{3}{2}}-16 & 25-16 \end{bmatrix}$$

Primjer

- Sada kad su poznate srednje vrijednosti i kovarijancijska matrica može se pisati izraz za funkciju gustoće vjerojatnosti trećeg reda za tražene tri slučajne varijable:

$$f_x(x_1, x_2, x_3, t_1, t_2, t_3) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{C}_x^{-1}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})\right\}}{\sqrt{(2\pi)^N |\mathbf{C}_x|}}$$

Bernoullijev proces

- Koristi se i izraz Bernoullijev slučajni niz.
- Definicija: niz

$$\mathbf{X}(n), \quad -\infty < n < \infty$$

nezavisnih slučajnih varijabli koje poprimaju dvije vrijednosti +1 i -1 s vjerojatnostima p i $1-p$ zove se Bernoullijev proces. Ako je $p = 0.5$ proces se zove binarni bijeli šum.

Primjer

- Primjer: kod linearnog prediktivnog kodiranja kodira se razlika između ulazne vrijednosti signala i predikcije na temelju prethodnih vrijednosti uzoraka signala.
- Ako se ta razlika kodira pomoću jednog bita (delta modulacija) onda se taj niz može modelirati kao Bernoullijev niz.
- Bernoullijev proces je stacionaran i ergodičan.

Slučajni hod

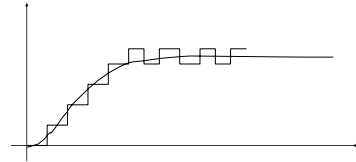
- Definicija: Slučajni niz definiran izrazom

$$Y(n) = \sum_{k=-\infty}^n \mathbf{X}(k), \quad -\infty < n < \infty$$

gdje je $\mathbf{X}(k)$ Bernoullijev proces koji poprima vrijednosti $+1, -1$ s vjerojatnostima p i $1-p$ zove se slučajni hod.

Primjer slučajnog hoda

- Kod rekonstruiranja delta moduliranog signala se sumiraju razlike ($+1$ i -1).



Markovljev proces

- Bernoullijev proces je niz čiji su uzorci nezavisne slučajne varijable.
- To u nekim primjenama dobro opisuje realnu situaciju.
- Takva pretpostavka nije dobra za modeliranje svih binarnih nizova (neki su nizovi zavisni).

Markovljev proces

- Najjednostavniji oblik zavisnosti je kad vjerojatnost nekog uzorka ovisi o vrijednosti prethodnog uzorka.
- Ovakav tip slučajnog procesa zove se Markovljev slučajni proces.
- To je dobar model za veliki broj praktičnih problema (primjer: nizovi točaka u slici).

Markovljev proces

- Markovljev proces ne mora biti binaran - može poprimiti bilo kakve vrijednosti (kontinuirane ili diskretne).

Markovljev proces

- Definicija: Slučajni proces je Markovljev proces ako uvjetna distribucija slučajne varijable $\mathbf{X}(n)$ uz danu prošlost $n' < n$ ovisi samo o prethodnom uzorku $\mathbf{X}(n-1)$

$$f_{\mathbf{X}(n)|\mathbf{X}(n-1),\mathbf{X}(n-2),\dots}(x_n | x_{n-1}, x_{n-2}, \dots) = f_{\mathbf{X}(n)|\mathbf{X}(n-1)}(x_n | x_{n-1})$$

Markovljev lanac

- Kada $\mathbf{X}(n)$ poprima vrijednosti iz konačnog skupa vrijednosti onda se takav Markovljev proces zove Markovljev lanac.

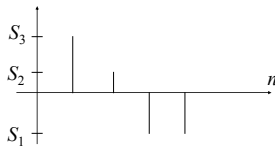
Markovljev lanac

- Definicija: Slučajni proces koji poprima vrijednosti na konačnom skupu je Markovljev lanac ako zadovoljava uvjet:

$$P[(\mathbf{X}(n) = x_n) | (\mathbf{X}(n-1) = x_{n-1}), (\mathbf{X}(n-2) = x_{n-2}), \dots] = P[(\mathbf{X}(n) = x_n) | (\mathbf{X}(n-1) = x_{n-1})]$$

Markovljev lanac

- Neka je skup mogućih vrijednosti $\{S_1, S_2, \dots, S_Q\}$
- Kada je $\mathbf{X}(n) = S_i$ kaže se da je Markovljev lanac u stanju i .



Markovljev lanac

- Prijelazne vjerojatnosti definirane su kao:

$$P_{ji}(n) = P[(\mathbf{X}(n) = S_j) | (\mathbf{X}(n-1) = S_i)]$$

- Pretpostavimo da su prijelazne vjerojatnosti konstantne (neovisne od n) i oblika:

$$P_{ji} = P[(\mathbf{X}(n) = S_j) | (\mathbf{X}(n-1) = S_i)]$$

- Tada se sve prijelazne vjerojatnosti mogu prikazati matricom \mathbf{P} čiji su elementi $P_{j|i}$

Markovljev lanac: Primjer

- $Q = 3$ (tri stanja):

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{1|1} & P_{2|1} & P_{3|1} \\ P_{1|2} & P_{2|2} & P_{3|2} \\ P_{1|3} & P_{2|3} & P_{3|3} \end{bmatrix}$$

- Gornja matrica naziva se stohastička matrica.

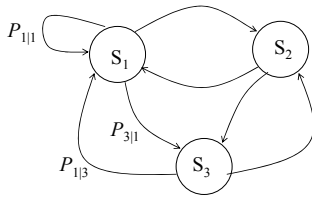
Markovljev lanac: Primjer

- Često se koristi i prijelazna matrica:

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{P}^T = \begin{bmatrix} P_{1|1} & P_{2|1} & P_{3|1} \\ P_{1|2} & P_{2|2} & P_{3|2} \\ P_{1|3} & P_{2|3} & P_{3|3} \end{bmatrix}$$

Markovljev lanac: Primjer

- Ovakav Markovljev lanac može se prikazati i prijelaznim dijagramom stanja:



Poissonov slučajni proces

- Poissonov proces funkcijom vremena opisuje koliko se je puta neki događaj dogodio.
- Događaj se događa u slučajnim vremenskim trenucima.
- Primjer događaja može biti:
 - dolazak klijenta u banku ili na blagajnu samoposluživanja,
 - kvar u sustavu.

Poissonov slučajni proces

- Poissonov proces je diskretni slučajni proces zato jer vrijednost poprima diskretne iznose 1,2,3, ...
- Zato se ovaj proces zove i Poissonov proces brojanja.

Poissonov slučajni proces

- Za definiciju Poissonovog procesa treba ispuniti dva uvjeta:
 - događaj se može zbiti samo jednom u svakom infinitezimalno kratkom vremenskom trenutku,
 - trenuci moraju biti statistički nezavisni.

Poissonov slučajni proces

- Iz ova dva uvjeta slijedi da je broj događaja u bilo kojem konačnom intervalu opisan Poissonovom distribucijom:

$$P[X(t) = k] = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$