Fourierov red

Fourierov red

- Složeni periodički signal :

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}(t+nT), \quad n \in \mathbb{Z}$$

može se aproksimirati trigonometrijskim polinomom:

sinteza: $$\tilde{x}(t) = \sum_{-N}^{N} a_n e^{j\varpi_1 nt}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

odnosno sumom eksponencijala.

- Za realni $\tilde{x}(t)$ kompleksne amplitude su konjugirane.

Fourierov red (nastavak)

$$a_{-n} = a_n^*; \quad a_n = A_n e^{j\varphi_n}, a_n^* = A_n e^{-j\varphi_n}$$

$$\tilde{x}_n(t) = A_n(e^{j\varphi_n} e^{j\varpi_1 nt} + e^{-j\varphi_n} e^{-j\varpi_1 nt})$$

$$\tilde{x}_n(t) = 2A_n \cos(\varpi_1 nt + \varphi_n)$$

- Koeficijenti a_n Fourierovog reda obično se određuju tako da se gornji red pomnoži s $e^{-jn\varpi_1 t}$ i integrira u osnovnom periodu T.
- Odatle izlazi Fourierov koeficient a_n

analiza: $$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{x}(t) e^{-jn\varpi_1 t} dt = X[n]$$

Svojstva Fourierovog Reda

$$\tilde{x}(t) = \sum X[n] e^{jn\omega_0 t}$$

$$\tilde{x}(t) \leftrightarrow X[n] \qquad \tilde{x}(t) \leftrightarrow X(n\omega_0) \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$a\tilde{u}(t) + b\tilde{v}(t) \leftrightarrow aU(n\omega_0) + bV(n\omega_0)$$

$$a\tilde{u}(t) + b\tilde{v}(t) \leftrightarrow aU[n] + bV[n]$$

$$x(t+\tau) \leftrightarrow X[n] e^{jn\omega_0 t}$$

$$x(t) e^{jm\omega_0 t} \leftrightarrow X[n+m]$$

Svojstva Fourierovog Reda (nastavak)

$$\tilde{y}(t) = \frac{1}{T} \tilde{f}(t) * \tilde{g}(t) \leftrightarrow F[n] \cdot G[n]$$

$$Y[n] = F[n] * G[n] \leftrightarrow \tilde{f}(t) \cdot \tilde{g}(t)$$

$$\tilde{y}(t) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{u}(t) \cdot \tilde{v}(t-\tau) d\tau \leftrightarrow \tilde{u} * \tilde{v}$$ cirkularna konvolucija

$$Y[n] = U[n] * V[n] \leftrightarrow \tilde{u}(t) \cdot \tilde{v}(t)$$

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |\tilde{x}(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |X[n]|^2$$

Poopćenje Fourierovog reda

- Elementarni signali u Fourierovom redu su eksponencijale, koje zadovoljavaju uvjet ortogonalnosti

$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{jn\varpi_1 t} e^{-jm\varpi_1 t} dt = \begin{cases} T, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

Napisano općenito za vremenski kontinuirane i diskretne signale

$$\int_{-T/2}^{T/2} \varphi_n(t) \varphi_m^*(t) dt = \begin{cases} K_n, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

$$\sum_{0}^{K-1} \varphi_n(k) \varphi_m^*(k) = \begin{cases} K_n, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

Poopćenje Fourierovog reda (nastavak)

- Pri predstavljanju složenih signala linearnom kombinacijom elementarnih signala, često se upotrebljavaju ortogonalne funkcije.

$$x(t) \cong \sum_{n=0}^{N} a_n \varphi_n(t) \qquad \text{ili} \qquad x[k] \cong \sum_{n=0}^{N} a_n \varphi_n[k]$$

- Koeficijenti a_n mogu se odrediti na temelju minimalne greške aproksimacije. Pogodna karakterizacija greške je integral ili suma kvadrata greške u danom intervalu.

$$\varepsilon = \frac{1}{k_1 - k_2} \sum_{k_1}^{k_2} \left[x[k] - \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n[k] \right]^2$$

Poopćenje Fourierovog reda (nastavak)

- Nađimo optimalne koeficijente a_1 i a_2 traženjem minimuma greške

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial a_2} = 0$$

$$\varepsilon = \sum_k \left\{ x^2[k] - 2x[k]\left[a_1\varphi_1[k] + a_2\varphi_2[k]\right] + \right.$$
$$\left. + \left[a_1\varphi_1[k] + a_2\varphi_2[k]\right]^2 \right\}$$

- Pri kvadriranju sumacije otpadaju miješani članovi zbog ortogonalnosti, tako da izlaze uvjeti ekstrema:

Poopćenje Fourierovog reda (nastavak)

$$-2x[k]\varphi_1[k] + 2a_1\varphi_1^2[k] = 0$$
$$-2x[k]\varphi_2[k] + 2a_2\varphi_2^2[k] = 0$$

- Odakle izlaze optimalni koeficijenti a_1 i a_2

$$a_1 = \frac{\sum x[k]\varphi_1[k]}{\sum \varphi_1^2[k]} = \frac{\alpha_1}{K_1}$$
$$a_2 = \frac{\sum x[k]\varphi_2[k]}{\sum \varphi_2^2[k]} = \frac{\alpha_2}{K_2}$$

Poopćenje Fourierovog reda (nastavak)

- Kvadratna greška aproksimacije konačnom sumom do N

$$\varepsilon = \frac{1}{k_2 - k_1} \sum_{k_1}^{k_2} \left[x[k] - \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n[k] \right]^2 =$$
$$= \frac{1}{k_2 - k_1} \sum_{k_1}^{k_2} \left[x^2[k] + \sum_n a_n^2 \varphi_n^2 - 2x \sum_n a_n \varphi_n[k] \right] =$$
$$= \frac{1}{k_2 - k_1} \left[\sum_{k_1}^{k_2} x^2[k] + \sum_n a_n^2 K_n - 2\sum_n a_n \alpha_n \right]$$

Poopćenje Fourierovog reda (nastavak)

- ako nadopunimo desne članove s $+\dfrac{\alpha_n^2}{K_n}$

funkcija kvadrat $\left(a_n^2 K_2 - 2a_n\alpha_n + \dfrac{\alpha_n^2}{K_n} \right) - \dfrac{\alpha_n^2}{K_n}$

izlazi $\left(a_n\sqrt{K_n} - \dfrac{\alpha_n}{\sqrt{K_n}} \right)^2 - \dfrac{\alpha_n^2}{K_n}$

Poopćenje Fourierovog reda (nastavak)

- Budući da za optimalne koeficijente vrijedi $a_n = \alpha_n / K_n$ najmanja greška je dana s

$$\varepsilon = \sum_k x^2[k] - \sum_n \frac{\alpha_n^2}{K_n}$$

odnosno zbog $\alpha_n^2 / K_n = a_n^2 K_n$

$$\varepsilon = \sum_{k_1}^{k_2} x^2[k] - \sum_{1}^{N} a_n^2 K_n$$

- kako su sumandi nenegativni može se zaključiti da s većim N greške aproksimacije su sve manje.

Poopćenje Fourierovog reda (nastavak)

- Kad N raste bez granica suma () $\sum_n a_n^2 K_n$ konvergira sumi $\sum_k x^2[k]$ što predstavlja energiju signala.
- U tom slučaju vrijedi

$$\sum_{k=1}^{K} x^2[k] = \sum_{1}^{N} a_n^2 K_n$$

što je generalizirani oblik Parsevalove relacije.

Poopćenje Fourierovog reda (nastavak)

Ako vrijedi za neki niz $x[k]$ kaže se da suma $\sum_n a_n \varphi_n[k]$ u prosjeku konvergira nizu $x[k]$.

Vremenski diskretni Fourierov red (DFT)

Uzmimo periodičan niz za koji vrijedi

$$\tilde{x}[k] = \tilde{x}[k + Nr], \quad r \in \mathbb{Z}$$

Kao kod kontinuiranog periodičnog signala može se razložiti na sumu periodičkih sinusoida ili eksponencijala frekvencija koje su cjelobrojni višekratnici osnovne $2\pi/N$

$$g_n[k] = e^{\frac{2\pi}{N}kn} = e^{\frac{2\pi n}{N}[k+rN]} = e_n[k + rN]$$

Vremenski diskretni Fourierov red (DFT) (nastavak)

Budući da su eksponencijale diskretne najviša frekvencija koja se može jednoznačno predstaviti je s $n=N-1$. Sve ostale $n \geq N$ mogu se naći među onima iz intervala $[0, N-1]$. Među svim eksponencijalama perioda N mogu se dakle naći samo N različitih

$$g_0, g_1, \ldots, g_{N-1}$$

jer: $g_0[k] = g_N[k],\ g_1[k] = g_{N+1}[k], \ldots$

Vremenski diskretni Fourierov red (DFT) (nastavak)

Periodičan niz $\tilde{x}[k]$ dakle se može predstaviti s N diskretnih eksponencijala

$$\tilde{x}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

Optimalni koeficijenti koji osiguravaju minimum sume kvadrata greške mogu se dobiti iz općeg izraza za razlaganje signala na ortogonalne nizove.

Vremenski diskretni Fourierov red (DFT) (nastavak)

Optimalni koeficijenti su:

$$a_n = \frac{\sum_{0}^{N-1} x[n]\varphi_n^*[k]}{\sum_{0}^{N-1} \varphi_n[k]\varphi_n^*[k]} = \frac{\sum_{0}^{N-1} x[k] e^{-\frac{2\pi nk}{N}}}{N}$$

Vremenski diskretni Fourierov red (DFT) (nastavak)

$$\widetilde{X}[n]=\frac{1}{N}\sum_{0}^{N-1}\widetilde{x}[k]e^{-\frac{2\pi nk}{N}}\;;\;\;\widetilde{x}[k]=\sum_{n=0}^{N-1}\widetilde{X}[n]e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

čine par izraza koji se nazivaju diskretnom Fourierovom transformacijom (DFT)

Kako se vidi niz koeficijenata a_n je također periodičan niz tj. $a_n=a_{n+N}=\widetilde{X}[n]$

s periodom N: $e^{j2\pi kn/N}\cdot e^{j2\pi rNn/N}=e^{j2\pi kn/N}$.

DFT povezuje N uzoraka jednog perioda periodičkog signala s N uzoraka periodičkog spektra.

Koeficijent $1/N$ se nekad pridružuje izrazu za $\widetilde{x}[k]$.

Vremenski diskretni Fourierov red (DFT) (nastavak)

Pogreška aproksimacije

Suma kvadrata greški VDFR-a ili DTFT-a se može dobiti iz općeg izraza () i $K_n=N$

$$\sum_{k=0}^{N-1}e^{j\frac{2\pi}{N}k(n-m)}=\begin{cases}N, & n=m\\ 0, & n\neq m\end{cases}$$

$$\varepsilon=\sum_{k=0}^{N-1}x^2[k]-\sum_{n=0}^{N-1}a_n^2N=0.$$

Vremenski diskretni Fourierov red (DFT) (nastavak)

$$X[n]=\sum_{k=0}^{N-1}x[k]e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}=\sum_{k=0}^{N-1}x[k]W^{nk}$$

$$x[k]=\sum_{k=0}^{N-1}X[n]e^{j\frac{2\pi nk}{N}}=\sum_{k=0}^{N-1}X[n]W^{-nk}$$

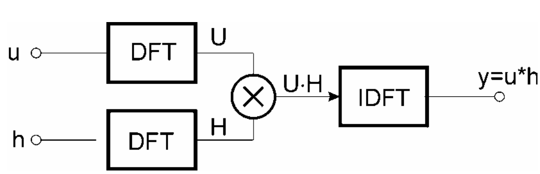
$$W=e^{-j\frac{2\pi}{N}}.$$

Periodičnost niza i periodičnost spektra

- Izvan područja $n\in[0, N\text{-}1]$ se nizovi signala i spektra ne ponavljaju.
- Izraz $[k\text{-}i]\text{mod}N$ znači da $[k\text{-}i]$ treba dijeliti s N i sačuvati samo ostatak.
- Da bi se preko cirkularne konvolucije stiglo na linearnu trebat će nadopuniti impulsima oba niza tako da period bude jednak cirkularnoj dužini konvolucije.
- Za slučaj dužine sekvencije M i N konvolucija će biti dužine M+N-1.

Periodičnost niza i periodičnost spektra (nastavak)

- Odziv sustava kao linearna konvolucija traži više multiplikacija nego pretvorba u spektar oba signala pobude i odziva na uzorak množenjem spektara i inverzijom.



Svojstva DTFS (DFT)

Linearnost

$$\text{DTFS}\{a\widetilde{u}[k]+b\widetilde{v}[k]\}=a\widetilde{U}[n]+b\widetilde{V}[n]$$

Posmak

$$\{\widetilde{x}[k-i]\text{mod}\,N\}\leftrightarrow\widetilde{X}[n]e^{-j\frac{2\pi ki}{N}}$$

Konvolucija cirkularna

$$\sum_{i=0}^{N-1}\widetilde{u}[k-i]\text{mod}\,N\widetilde{v}[i]\leftrightarrow\widetilde{U}[n]\cdot\widetilde{V}[n]$$

Parseval

$$\sum_{k=0}^{N-1}\left|\widetilde{x}[k]\right|^2=\sum_{n=0}^{N-1}\left|\widetilde{X}[n]\right|^2$$

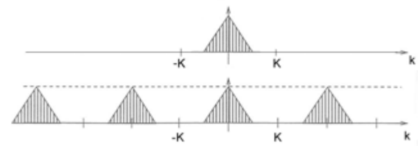
Vremenski diskretna Fourierova transformacija

Jednostavan prijelaz iz Fourierovih redova u transformaciju može se dobiti prikazom aperiodičkog signala kao graničnog slučaja periodičkog signala kad period ponavljanja teži u beskonačnost.

Vremenski diskretna Fourierova transformacija (nastavak)

Pretpostavimo da je aperiodički signal $x[k]$ dan jednim periodom signala $\tilde{x}[k]$, koji je periodičan s N.

$$x[k] = \begin{cases} \tilde{x}[k], & -K \le k \le K \\ 0, & |k| \ge K \end{cases} \qquad N = 2K+1$$



Vremenski diskretna Fourierova transformacija (nastavak)

Kad K raste, razmak između sekcija signala se povećava, te za $K \to \infty$ replike se udaljavaju u beskonačnost.

$$x[k] = \lim_{K \to \infty} \tilde{x}[k]$$

Vremenski Diskretni Fourierov red periodičkog niza $\tilde{x}[k]$ je:

$$\tilde{x}[k] = \sum_{n=-K}^{K} \tilde{X}[n] e^{j\frac{2\pi kn}{N}} \qquad \tilde{X}[n] = \frac{1}{N} \sum_{n=-K}^{K} \tilde{x}[k] e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}$$

Vremenski diskretna Fourierova transformacija (nastavak)

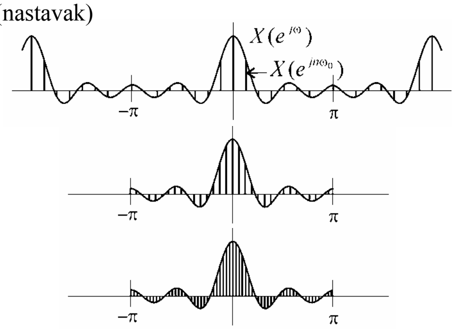
Budući da je $x[k] = \tilde{x}[k]$ za $-K \le k \le K$ i $x[k] = 0$ za $k > K$ izlazi

$$X[n] = \frac{1}{N} \sum_{n=-K}^{K} x[k] e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}$$

$X[n]$ je periodičan s N. Spektralni uzorci su s razmakom $2\pi / N = \omega_0$

Vremenski diskretna Fourierova transformacija (nastavak)



Slika prikazuje uzorke spektra i njihovu ovojnicu, koja je periodična s 2π. Za veći N uzorci postaju sve gušći.

Vremenski diskretna Fourierova transformacija (nastavak)

Zamislimo da tom nizu uzoraka na slici spektra odredimo normiranu ovojnicu kontinuiranu periodičku funkciju, tako da vrijedi

$$X[n] = \frac{1}{N} X(e^{j\omega})\Big|_{\omega = n\omega_0}$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-j\omega k}$$

$$X(e^{j\omega})\Big|_{\omega = n\omega_0} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-jn\omega_0 k}$$

Vremenski diskretna Fourierova transformacija (nastavak)

Sad se periodički spektar može izraziti s normiranom ovojnicom

$$\tilde{x}[k]=\frac{1}{N}\sum_{n=-K}^{+K}X(e^{j\omega_0 n})e^{j\omega_0 nk}$$

$$x[k]=\frac{\omega_0}{2\pi}\sum_{n=-K}^{+K}X(e^{j\omega_0 n})e^{j\omega_0 nk}$$

Utjecaj graničnog prijelaza $N\to\infty$ je da smanjuje razmak ω_0 između komponenti spektra $\omega_0=2\pi/N$.

Vremenski diskretna Fourierova transformacija (nastavak)

U sumaciji imamo vrijednosti $X(e^{j\omega_0 k})\cdot e^{j\omega_0 k}$ množene sa širinom $\omega_0=2\pi/N$. Sumacija je pravokutna aproksimacija integrala.

Kad $N,K\to\infty$, $\omega=k\omega_0$, $d\omega=\omega_0$, a suma prelazi u integral

$$x[k]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})\cdot e^{j\omega k}d\omega$$

Vremenski diskretna Fourierova transformacija (nastavak)

Time smo dobili aperiodički niz $x[k]$ kao superpoziciju eksponencijala ili sinusoida. Težinska funkcija je spektar

$$X(e^{j\omega})=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\cdot e^{-j\omega k}$$

pa zajedno sa integralom čini par koji se naziva vremenski diskretnom Fourierovom transformacijom VDFT (engl. Discrete Time Fourier Transform DTFT).

Vremenski diskretna Fourierova transformacija (nastavak)

Uvjet da aperiodički niz ima DTFT je da njegova sumacija apsolutno konvergira

$$\sum_{-\infty}^{\infty}|x[k]|<\infty.$$

Svojstva DTFT

Linearnost

$$au[n]+bv[n]\leftrightarrow aU(e^{j\omega})+bV(e^{j\omega})$$

Posmak

$$x[k-i]\leftrightarrow e^{-ji\omega}X(e^{j\omega})$$

Konvolucija

$$u*v=\sum_{i=-\infty}^{\infty}u[i]v[k-i]\leftrightarrow U(e^{j\omega})\cdot V(e^{j\omega})$$

Svojstva DTFT (nastavak)

Parseval

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty}x[k]x^*[k]=\sum_{i=-\infty}^{\infty}|x[k]|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|X(e^{j\omega})|^2d\omega$$

Množenje

$$u[k]v[k]=\frac{1}{2\pi}\int_{-T/2}^{T/2}U(e^{j\Theta})V(e^{j(\omega-\Theta)})d\Theta$$ periodična konvolucija

Fourierova transformacija

Upotrebljava se za predstavljanje aperiodskih signala superpozicijom eksponencijala ili sinusoida.
Može se izvesti iz Fourierovog reda, tako da se aperiodski signal dobije kao granični slučaj periodičnog signala, čiji period ide u beskonačnost.
Slično kao kod DTFT

$$x(t)=\begin{cases}\tilde{x}(t), & -T/2\le t\le T/2\\ 0, & |t|>T/2\end{cases} \qquad x(t)=\lim_{T\to\infty}\tilde{x}(t)$$

Fourierova transformacija (nastavak)

Harmonijske komponente postaju guste, pa dobivamo iz sume integral:

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\varpi)\cdot e^{j\varpi t}d\varpi$$

$$X(j\varpi)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\cdot e^{-j\varpi t}dt$$

Fourierov spektar signala

Spektar signala napisan u pravokutnom obliku sa svojim realnim i imaginarnim dijelom

$$X(j\omega)=X_r(j\omega)+jX_i(j\omega)$$

napisan u polarnom obliku sa svojim amplitudnim i faznim spektrom

$$X(j\omega)=|X(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$$

$$|X(j\varpi)|=A(\varpi), \qquad X_r(\varpi)=A(\omega)\cos\varphi(\varpi)$$

$$\varphi(\omega)=arctg\frac{X_i(\omega)}{X_r(\omega)}, \quad X_i(\varpi)=A(\omega)\sin\varphi(\varpi)$$

Fourierov spektar signala (nastavak)

Da bi frekvencija signala imala Fourierovu transformaciju mora zadovoljavati neke uvjete:

$$1.\ \int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt\le\int_{-\infty}^{+\infty}\left|x(t)e^{-j\omega t}\right|dt\le\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|dt<\infty$$

Funkcija $x(t)$ mora biti apsolutno integrabilna te imati konačan broj maksimuma i minimuma, tj. konačan broj diskontinuiteta u konačnom intervalu.

Fourierov spektar signala (nastavak)

Transformacija postoji za praktički upotrebljive signale. Ima međutim signala kao što su stepenica i sinusoida koje nisu apsolutno integrabilne, ali se mogu predstaviti transformacijom, ako dozvolimo upotrebu impulsa u vremenskom i frekvencijskom domenu.

Fourierov spektar signala (nastavak)

Primjer: Spektar pravokutnog pulsa.

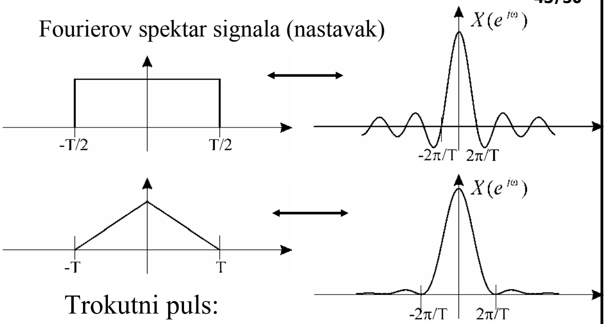
Pravokutni puls je definiran:

$$r_C(t)=\begin{cases}1, & \text{za } |t|<T/2\\ 0, & \text{za } |t|>T/2\end{cases}$$

$$R_C(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}r_C(t)e^{-j\varpi t}dt=\int_{-T/2}^{T/2}1\cdot e^{-j\varpi t}dt=\left.\frac{e^{-j\omega t}}{j\omega}\right|_{-T/2}^{T/2}=$$

$$=\frac{e^{-j\varpi T/2}-e^{j\varpi T/2}}{j\varpi t}=T\frac{\sin(\varpi T/2)}{(\varpi T/2)}=T\mathrm{sinc}\,(\varpi T/2)$$

Fourierov spektar signala (nastavak)



Trokutni puls:

$$u_r(t)=\begin{cases} t-|t/T|, & \text{za } |t|\le T \\ 0, & \text{za } |t|>T \end{cases} \qquad TR(\varpi)=T\operatorname{sinc}^2(\varpi T/2)$$

Fourierov spektar signala (nastavak)

Simetrija FT među varijablama t i ϖ omogućuju lagano određivanje odnosa između signala i spektra.

Ako je:

$$x(t)\longleftrightarrow X(j\varpi)$$

Tada je:

$$X(jt)\longleftrightarrow 2\pi x(-\varpi)$$

Dokaz slijedi iz izraza za $x(t)$ i zamjenom $t\to-\infty$

Prolaz signala kroz linearan sustav

- Kako smo ranije rekli sustav je skup operacija na ulaznom signalu da bi se dobio izlazni signal.
- Na temelju dosadašnjeg zaključujemo da se integralno vladanje sustava može odrediti iz njegovog odziva na impuls (KS) ili uzorak (DS) ili pak iz frekvencijske karakteristike.
- Prema tome za linearne sustave imamo još dva matematička modela.

Odziv na impuls ili na sinus pobudu

- Za razliku od mjerenja parametara sustava opisanog diferencijalnim jednadžbama, mjerenje impulsnog odziva ili frekvencijske karakteristike je dosta jednostavno.

Svojstva FT:	vrem. domena	frekv. domena
linearnost FT	$au(t)+bv(t)\leftrightarrow aU(\omega)+bV(\omega)$	
simetrija	$x(t)\leftrightarrow X(\omega)$	$X(t)\leftrightarrow 2\pi x(-\omega)$
kompresija expom	$x(at)=\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{\varpi}{a}\right)$	
konvolucija u VD	$x(t)\leftrightarrow X(\omega)$	$h(t)\leftrightarrow H(\omega)$
	$x*h\leftrightarrow X(\omega)\cdot H(\omega)$	
konvolucija u FD	$x\cdot h\leftrightarrow X(\omega)*H(\omega)$	
vremenski pomak	$x(t-t_0)\leftrightarrow X(\omega)e^{-j\omega t_0}$	

Svojstva FT (nastavak):	vrem. domena ↔ frekv. domena
frekvencijski pomak	$x(t)e^{j\omega_0 t}\leftrightarrow X(\omega-\omega_0)$
vremenska derivacija	$\frac{d^n x}{dt^n}\leftrightarrow (j\omega)^n X(\omega)$
vremenska integracija	$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)d\tau\leftrightarrow \frac{X(\omega)}{j\omega}+\pi X(0)\delta(\omega)$
frekvencijska derivacija	$-jtx(t)\leftrightarrow \frac{dX(\omega)}{d\omega}$
frekvencijska integracija	$\frac{x(t)}{-jt}\leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} X(\Theta)d\Theta$
vremenska inverzija	$x(-t)\leftrightarrow X(-\omega)$

Transformacije:	vrem. domena	frekv. domena

$$\delta(t)\leftrightarrow 1$$
$$1\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$
$$\cos\overline{\omega}t\leftrightarrow \pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$$
$$\sin\overline{\omega}t\leftrightarrow j\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$$
$$\operatorname{sgn} t\leftrightarrow \frac{2}{j\pi}$$
$$u(t)\leftrightarrow \pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$$
$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}X_n e^{jn\omega_1 t}\leftrightarrow 2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}X_n\delta(\omega-n\omega_1)$$

Transformacije	vrem. domena	frekv. domena

(nastavak):

$$e^{j\omega_0 t}\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$
$$\omega_0=2\pi/T$$
$$\sum_k\delta(t-kT)\leftrightarrow \omega_0\sum_n\delta(\omega-n\omega_0)$$
$$\delta^{(n)}(t)\leftrightarrow (j\omega)^n$$
$$|t|\leftrightarrow -\frac{2}{\omega^2}$$
$$t^n\leftrightarrow 2\pi j^n\delta^{(n)}(\omega)$$