Osnove slučajnih procesa

Prof. dr. sc. Sven Lončarić
Prof. dr. sc. Hrvoje Babić
Doc. dr. sc. Damir Seršić

Literatura

- WEB: http://ts.zesoi.fer.hr
- H. Babić, S. Lončarić, D. Seršić: *Slučajni procesi u sustavima*, http://spus.zesoi.fer.hr, 2002.

- P. Z. Peebles: *Probability, Random Variables and Random Signal Principles, 3rd ed.*, McGraw-Hill, 1993.
- D.G.Manolakis, V.K.Ingle, S.M.Kogon: *Statistical and Adaptive Signal Processing*, McGraw-Hill, 2000
- M.H. Hayes: *Statistical digital signal processing and modeling*, John Wiley & Sons, 1996.

Pregled tema

- Uvod
- Koncept slučajnog procesa
- Klasifikacija slučajnih procesa
- Funkcije distribucije slučajnog procesa
- Stacionarnost i nezavisnost
- Korelacijske i kovarijancijske funkcije
- Primjeri slučajnih procesa

Uvod

- Neke su pojave po prirodi determinističke, a neke su stohastičke.
- Nekad se i komplicirane determinističke pojave tretiraju kao stohastičke jer bi deterministički problem bio prekompliciran za modeliranje.
- Mnoge pojave i procesi u tehnici mogu se interpretirati kao slučajni signali i tako analizirati.
- Zato je u znanosti i inženjerstvu potrebno znati obrađivati slučajne valne oblike i signale.

Koncept slučajnog procesa

- Naziv: slučajni proces ili stohastički proces.
- Engl. *random process* ili *stochastic process*.
- Koncept slučajnog procesa dobiva se iz koncepta slučajne varijable uz dodavanje vremenske varijable.

Slučajna varijabla

- Podsjetnik: po definiciji, slučajna varijabla je preslikavanje koje svakom ishodu s eksperimenta dodjeljuje broj $x(s)$, a koji se zove realizacija slučajne varijable.
- Svaki ishod eksperimenta ima svoju vjerojatnost tako da i svaka realizacija slučajne varijable ima svoju vjerojatnost.
- Skup svih vrijednosti $x(s)$ zove se slučajna varijabla i označava se s $\mathbf{X}(s)$ ili češće samo s $\mathbf{X}$.

Koncept slučajnog procesa

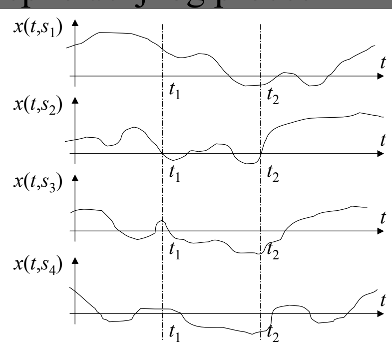
- Slučajni proces je preslikavanje koje svakom ishodu eksperimenta *s* dodjeljuje funkciju vremena $x(t, s)$.
- Obitelj svih takvih funkcija $x(t, s)$ zove se slučajni proces i označava se kao $\mathbf{X}(t, s)$.
- Češće se koristi kratka notacija gdje se piše samo $x(t)$ za jednu specifičnu realizaciju slučajnog procesa te notacija $\mathbf{X}(t)$ za slučajni proces.

Koncept slučajnog procesa

- Pojedina funkcija $x(t, s)$ za neki fiksni *s* naziva se realizacija slučajnog procesa.
- Kada fiksiramo *s* a ostavimo *t* kao varijablu onda slučajni proces predstavlja jednu vremensku funkciju .
- Kada fiksiramo *t*, a ostavimo *s* kao varijablu onda slučajni proces postaje slučajna varijabla $\mathbf{X}(t)$.

Koncept slučajnog procesa

- Za $t = t_1$ $X(t_1,s)$ je slučajna varijabla



Klasifikacije slučajnih procesa

- Klasifikacije je moguće obaviti na temelju nekoliko različitih kriterija kao što su:
  - s obzirom na diskretnost tj. kontinuiranost,
  - na determinističke i nedeterminističke,
  - na stacionarne i nestacionarne.

Klasifikacija s obzirom na diskretizaciju

- Klasifikacija s obzirom na diskretizaciju vrši se na osnovi diskretnosti / kontinuiranosti parametara *t* i $\mathbf{X}(t)$:
  - argument *t* može biti kontinuiran i diskretan,
  - vrijednosti $\mathbf{X}(t)$ mogu biti kontinuirane i diskretne.
- Uz takav način klasifikacije imamo četiri moguća slučaja.

Kontinuirani slučajni proces

- Ako je $\mathbf{X}(t)$ kontinuiran i *t* je kontinuirana varijabla onda se $\mathbf{X}(t)$ zove kontinuirani slučajni proces.
- Primjer:
  - termički šum generiran u nekoj mreži koja sadrži otpornike.

Diskretni slučajni proces

- Ako slučajna varijabla **X**(t) poprima samo neke diskretne vrijednosti, a t je kontinuirana varijabla tada se **X**(t) zove diskretni slučajni proces.
- Primjer:
  - ako kvantiziramo vrijednost nekog kontinuiranog slučajnog procesa dobivamo diskretni slučajni proces (npr. uslijed A/D konverzije, npr. 8-bitova).

Kontinuirani slučajni niz

- Slučajni proces kod kojeg je **X**(t) kontinuirana ali vrijeme t je diskretizirano zove se kontinuirani slučajni niz.
- Primjer:
  - ovaj slučaj dobivamo ako otipkamo u vremenu neki kontinuirani slučajni proces.

Diskretni slučajni niz

- Ako su i vrijednost **X**(t) i varijabla t diskretni onda se takav proces naziva diskretni slučajni niz.
- Primjer:
  - kvantizacija u vremenu i iznosu.

Klasifikacija s obzirom na predvidivost

- Slučajni proces se može opisati pomoću valnog oblika funkcija realizacija tog procesa.
- Ako se buduće vrijednosti funkcije realizacije ne mogu točno predvidjeti iz prošlih vrijednosti onda se slučajni proces zove nedeterministički.
- Ako se buduće vrijednosti neke funkcije realizacije mogu točno predvidjeti iz prošlih vrijednosti onda se slučajni proces zove deterministički.

Primjer

- Neka je slučajni proces **X**(t) definiran izrazom

$$\mathbf{X}(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$$

gdje A, ϕ ili ω_0 mogu biti slučajne varijable.
- Tada je **X**(t) deterministički slučajni proces.

Klasifikacija s obzirom na stacionarnost

- Slučajni procesi se s obzirom na stacionarnost mogu podijeliti na stacionarne i nestacionarne slučajne procese.
- Stacionarni slučajni procesi su oni čija se statistička svojstva ne mijenjaju s vremenom.
- Nestacionarni slučajni procesi su oni koji nisu stacionarni.

Funkcije distribucije slučajnog procesa

- Za neki slučajni proces **X**(t) može se izračunati:
  - funkcija distribucije prvog reda,
  - funkcija distribucije drugog reda,
  - funkcija distribucije N-tog reda.

Funkcija distribucije prvog reda

- U određenom trenutku t, **X**(t) je slučajna varijabla koja ima funkciju distribucije definiranu izrazom:

$$F_X(x,t) = P(\mathbf{X}(t) \le x)$$

- Ova se funkcija također zove funkcija distribucije prvog reda slučajnog procesa **X**(t) zato jer se promatra distribucija samo jedne slučajne varijable (u trenutku t).

Funkcija distribucije drugog reda

- Za dvije slučajne varijable $\mathbf{X}_1=\mathbf{X}(t_1)$ i $\mathbf{X}_2=\mathbf{X}(t_2)$ definirane u dva vremenska trenutka t_1 i t_2 funkcija distribucije drugog reda slučajnog procesa **X**(t) definirana je kao:

$$F_X(x_1,x_2,t_1,t_2) = P(\mathbf{X}(t_1) \le x_1, \mathbf{X}(t_2) \le x_2)$$

Funkcija distribucije N-tog reda

- Za N slučajnih varijabli $\mathbf{X}_i = \mathbf{X}(t_i)$, $i = 1, 2, \ldots, N$ funkcija distribucije N-tog reda slučajnog procesa **X**(t) definirana je izrazom:

$$F_X(x_1,\ldots,x_N,t_1,\ldots,t_N) =$$
$$= P(\mathbf{X}(t_1) \le x_1, \ldots, \mathbf{X}(t_N) \le x_N)$$

Funkcije gustoće vjerojatnosti slučajnog procesa

- Za neki slučajni proces **X**(t) može se izračunati:
  - funkcija gustoće vjerojatnosti prvog reda,
  - funkcija gustoće vjerojatnosti drugog reda,
  - funkcija gustoće vjerojatnosti N-tog reda.

Funkcija gustoće vjerojatnosti prvog reda

- Funkcija gustoće vjerojatnosti prvog reda slučajnog procesa **X**(t) definirana je izrazom:

$$f_X(x,t) = \frac{dF_X(x,t)}{dx}$$

Funkcija gustoće vjerojatnosti drugog reda

- Funkcija gustoće vjerojatnosti drugog reda slučajnog procesa $\mathbf{X}(t)$ definirana je izrazom:

$$f_X(x_1, x_2, t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F_X(x_1, x_2, t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$$

Funkcija gustoće vjerojatnosti *N*-tog reda

- Analogno je definirana funkcija gustoće vjerojatnosti N-tog reda slučajnog procesa $\mathbf{X}(t)$:

$$f_X(x_1, \ldots, x_N, t_1, \ldots, t_N) = \frac{\partial^N F_X(x_1, \ldots, x_N, t_1, \ldots, t_N)}{\partial x_1 \cdots \partial x_N}$$

Stacionarnost i nezavisnost

- U nastavku uvodimo pojmove
  - stacionarnosti,
  - nezavisnosti,

  za slučajne procese.

Pojam stacionarnosti

- Za neki fiksni trenutak t $\mathbf{X}(t)$ predstavlja slučajnu varijablu.
- Ta slučajna varijabla ima svoja statistička svojstva (srednju vrijednost, varijancu, momente) koje ovise o njezinoj funkciji gustoće vjerojatnosti.
- Slično ako promatramo dvije slučajne varijable $\mathbf{X}(t_1)$ i $\mathbf{X}(t_2)$ u nekim trenucima t_1 i t_2 onda one imaju funkciju gustoće drugog reda koja određuje statistička svojstva drugog reda.

Pojam stacionarnosti

- Ako promatramo N vremenskih trenutaka $t_1, \ldots, t_N$ dobivamo N slučajnih varijabli $\mathbf{X}(t_1), \ldots, \mathbf{X}(t_N)$ čija su statistička svojstva određena funkcijom gustoće vjerojatnosti N-tog reda.
- Ako se statistička svojstva ne mijenjaju s vremenom, onda je slučajni proces stacionaran.

Definicija stacionarnosti

- Definicija: stohastički proces $\mathbf{X}(t)$ je stacionaran ako za svaki $n \in \boldsymbol{N}$, za svaki izbor trenutaka $t_1, \ldots, t_n$ i za svaki $u \in \boldsymbol{R}$
  slučajne varijable $\mathbf{X}(t_1), \ldots, \mathbf{X}(t_n)$ i
  slučajne varijable $\mathbf{X}(t_1+u), \ldots, \mathbf{X}(t_n+u)$
  imaju jednake funkcije distribucije n-tog reda.

Definicija nestacionarnosti

- Definicija: slučajni proces koji nije stacionaran zove se nestacionaran slučajni proces.

Definicija statističke nezavisnosti

- Dva procesa $\mathbf{X}(t)$ i $\mathbf{Y}(t)$ su statistički nezavisni ako je grupa slučajnih varijabli $\mathbf{X}(t_1)$, …, $\mathbf{X}(t_N)$ nezavisna od grupe $\mathbf{Y}(t_1')$, …, $\mathbf{Y}(t_N')$ za bilo koji izbor trenutaka t_1, …, t_N , t_1', …, t_N'.
- Nezavisnost zahtijeva da vrijedi:

$$f_{X,Y}(x_1,\dots,x_N,y_1,\dots,y_N,t_1,\dots,t_N,t_1',\dots,t_N') =$$
$$= f_X(x_1,\dots,x_N,t_1,\dots,t_N)\,f_Y(y_1,\dots,y_N,t_1',\dots,t_N')$$

Stacionarnost prvog reda

- Definicija: Slučajni proces je stacionaran prvog reda ako se funkcija gustoće vjerojatnosti prvog reda ne mijenja s vremenom:

$$f_X(x,t) = f_X(x,t+\Delta t)$$

za svaki t i Δt.

Stacionarnost prvog reda

- Posljedica prethodne definicije je da za stacionarni proces prvog reda funkcija gustoće vjerojatnosti $f_x(x, t)$ ne ovisi o vremenu t.
- To znači da su sve statistike (srednja vrijednost, varijanca, i ostale) nepromjenjive u vremenu.

Stacionarnost drugog reda

- Definicija: slučajni proces je stacionaran drugog reda ako vrijedi

$$f_X(x_1,x_2,t_1,t_2) = f_X(x_1,x_2,t_1+\Delta t,t_2+\Delta t)$$

Stacionarnost drugog reda

- Stacionarni proces drugog reda je također i stacionarni proces prvog reda zato jer funkcija gustoće drugog reda određuje i funkciju gustoće prvog reda:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$$

Stacionarnost drugog reda

- Ako u izrazu za definiciju stacionarnosti

$$f_X(x_1,x_2,t_1,t_2)=f_X(x_1,x_2,t_1+\Delta t,t_2+\Delta t)$$

- odaberemo npr. $\Delta t=-t_1$, tada dobivamo

$$f_X(x_1,x_2,t_1,t_2)=f_X(x_1,x_2,0,t_2-t_1)$$

- Dakle vidi se da f_X ovisi samo o razlici t_2-t_1

Korelacija slučajnih varijabli

- Promatrajmo korelaciju dvaju slučajnih varijabli $\mathbf{X}_1=\mathbf{X}(t_1)$ i $\mathbf{X}_2=\mathbf{X}(t_2)$ definiranu izrazom

$$E[\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2]=E[\mathbf{X}(t_1)\mathbf{X}(t_2)]$$

- Vidi se da ova korelacija općenito ovisi o trenucima t_1 i t_2.

Autokorelacijska funkcija slučajnog procesa

- Definicija: autokorelacijska funkcija slučajnog procesa $\mathbf{X}(t)$ definirana je izrazom:

$$R_{XX}(t_1,t_2)=E[\mathbf{X}(t_1)\mathbf{X}(t_2)]$$

- Dakle autokorelacijska funkcija jednaka je jednostavnoj korelaciji dviju susjednih slučajnih varijabli.

Autokorelacijska funkcija slučajnog procesa

- Budući da korelacija dviju slučajnih varijabli ovisi o funkciji gustoće drugog reda, slijedi da autokorelacijska funkcija stacionarnog procesa drugog reda ovisi samo o razlici $\tau=t_2-t_1$.

$$R_{XX}(t_1,t_1+\tau)=E[\mathbf{X}(t_1)\mathbf{X}(t_1+\tau)]=R_{XX}(\tau)$$

Stacionarnost u širem smislu

- Mnogi praktični inženjerski problemi traže analizu autokorelacijske funkcije i srednje vrijednosti slučajnog procesa.
- Rješenja tih problema su jednostavnija kada ove veličine ne ovise o apsolutnom vremenu.
- Naravno, ako je proces stacionaran drugog reda autokorelacijska funkcija i srednja vrijednost ne ovise o vremenu, no to je prestrog uvjet koji se često ne da provjeriti u praksi.

Stacionarnost u širem smislu

- Zato se uvodi pojam stacionarnosti u širem smislu. koji nije tako strog kao stacionarnost drugog reda
- Definicija: proces je stacionaran u širem smislu ako vrijedi:

$$E[\mathbf{X}(t)]=\text{konst}$$
$$E[\mathbf{X}(t)\mathbf{X}(t+\tau)]=R_{XX}(\tau)$$

Stacionarnost u širem smislu

- Proces koji je stacionaran drugog reda je i stacionaran u širem smislu.
- Obrat ne vrijedi.

Primjer

- Zadan je slučajni proces
$$\mathbf{X}(t) = A\cos(\omega_0 t + \Theta)$$
gdje su A i ω_0 konstante, a Θ je uniformno distribuirana slučajna varijabla na intervalu $(0, 2\pi)$.
- Da bi ispitali da li je ovaj slučajni proces stacionaran u širem smislu odredit ćemo njegovu srednju vrijednost i autokorelacijsku funkciju.

Primjer: Srednja vrijednost

- Srednja vrijednost:

$$E[\mathbf{X}(t)] = \int_0^{2\pi} A\cos(\omega_0 t + \Theta)\frac{1}{2\pi}\,d\Theta = 0$$

- Dakle vidi se da srednja vrijednost ne ovisi o vremenu t.

Primjer: Autokorelacijska funkcija

$$R_{XX}(t, t+\tau) = E[A\cos(\omega_0 t + \Theta)A\cos(\omega_0 t + \omega_0\tau + \Theta)]$$
$$= \frac{A^2}{2}E[\cos(\omega_0\tau) + \cos(2\omega_0 t + \omega_0\tau + 2\Theta)]$$
$$= \frac{A^2}{2}\cos(\omega_0\tau) + \frac{A^2}{2}\underbrace{E[\cos(2\omega_0 t + \omega_0\tau + 2\Theta)]}_{0}$$
$$= \frac{A^2}{2}\cos(\omega_0\tau) = R_{xx}(\tau)$$

- Dakle autokorelacijska funkcija ovisi samo o τ.

Primjer

- Pokazali smo da u ovom primjeru
  - srednja vrijednost slučajnog procesa $\mathbf{X}(t)$ ne ovisi o vremenu, a
  - autokorelacijska funkcija ovisi samo o razlici vremena τ a ne i o apsolutnom vremenskom trenutku t.
- Slijedi da je proces $\mathbf{X}(t)$ stacionaran u širem smislu.

Stacionarnost *N*-tog reda

- Definicija: slučajni proces je stacionaran N-tog reda ako vrijedi da

$$f_X(x_1,\ldots,x_N,t_1,\ldots,t_N) =$$
$$= f_X(x_1,\ldots,x_N,t_1+\Delta t,\ldots,t_N+\Delta t)$$

Stacionarnost *N*-tog reda

- Stacionarnost *N*-tog reda implicira stacionarnost svakog reda $k \le N$.
- Proces koji je stacionaran za svaki $N = 1, 2, \ldots$ zove se stacionaran u užem smislu (ili strogo stacionaran).

Vremensko usrednjavanje i ergodičnost

- U nastavku teksta uvodimo pojmove
  - vremenskog usrednjavanja i
  - ergodičnosti.

Vremensko usrednjavanje

- Definicija: vremensko usrednjavanje (ili prosjek) neke veličine definiran je kao:

$$A[.] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} [.]dt$$

- Notacija A je analogna notaciji E za statistički prosjek.
- A je vremenski prosjek (engl. *time-average*)

Vremensko usrednjavanje

- Naročito su interesantni u primjenama slijedeći vremenski prosjeci:
  - vremenska srednja vrijednost,
  - vremenska autokorelacijska funkcija.

Vremenska srednja vrijednost

- Vremenska srednja vrijednost definirana je izrazom:

$$\overline{x} = A[x(t)] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)dt$$

Vremenska autokorelacijska funkcija

- Vremenska autokorelacijska funkcija definirana je izrazom:

$$\mathrm{R}_{xx}(\tau) = A[x(t)x(t+\tau)] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)x(t+\tau)dt$$

Diskusija vremenskog usrednjavanja

- Za jednu određenu realizaciju $x(t)$ slučajnog procesa izrazi za vremensku srednju vrijednost i vremensku autokorelacijsku funkciju (za neki fiksni τ) daju dva broja.

Diskusija vremenskog usrednjavanja

- Za sve funkcije realizacije vremenska srednja vrijednost i vremenska autokorelacijska funkcija postaju slučajne varijable.
- Može se vidjeti da ako je X stacionaran proces u širem smislu vrijedi

$$E[\overline{x}] = E[\mathbf{X}(t)] = \overline{\mathbf{X}}$$
$$E[\mathrm{R}_{XX}(\tau)] = R_{XX}(\tau)$$

Ergodičnost

- Definicija: slučajni proces je ergodičan ako je vremensko usrednjavanje jednako statističkom usrednjavanju.
- Drugim riječima ergodičnost znači da npr. vremenska srednja vrijednost mora biti jednaka statističkoj srednjoj vrijednosti.

Diskusija ergodičnosti

- Zašto je ergodičnost važna?
- Pretpostavimo da želimo odrediti statističku srednju vrijednost $\eta(t) = \mathrm{E}[x(t)]$ procesa $\mathbf{X}(t)$.
- Da bi to odredili možemo sakupiti veliki broj funkcija realizacije $x(t,s_i)$ i izračunati statističku srednju vrijednost

$$\eta(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x(t,s_i)$$

Diskusija ergodičnosti

- No problem je ako imamo samo jednu realizaciju slučajnog procesa. Možemo li u tom slučaju koristiti vremensko usrednjavanje da odredimo srednju vrijednost?

$$\overline{x} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t,s)\,dt$$

- Odgovor: možemo ako je $\eta(t)$ = konst. te ako je proces ergodičan.

Praktične napomene

- U praksi često možemo pretpostaviti da je proces ergodičan.
- Nekad nemamo drugog izbora.

Korelacijske funkcije

- U nastavku definirat ćemo:
  - auto-korelacijsku funkciju,
  - kros-korelacijsku funkciju,
  - auto-kovarijancijsku funkciju,
  - kros-kovarijancijsku funkciju.

Auto-korelacijska funkcija

- Definicija: auto-korelacijska funkcija slučajnog procesa $\mathbf{X}(t)$ je korelacija dvaju slučajnih varijabli $\mathbf{X}(t)$ i $\mathbf{X}(t+\tau)$

$$R_{XX}(t,t+\tau)=E[\mathbf{X}(t)\mathbf{X}(t+\tau)]$$

Svojstva

- Za procese koji su stacionarni u širem smislu

$$R_{XX}(\tau)=E[\mathbf{X}(t)\mathbf{X}(t+\tau)]$$

- Tada vrijedi

$$|R_{XX}(\tau)|\leq R_{XX}(0)$$
$$R_{XX}(-\tau)=R_{XX}(\tau)$$
$$R_{XX}(0)=E[\mathbf{X}^2(t)]$$

Kros-korelacijska funkcija

- Definicija: kros-korelacijska funkcija dvaju slučajnih procesa $\mathbf{X}(t)$ i $\mathbf{Y}(t)$ definirana je kao

$$R_{XY}(t,t+\tau)=E[\mathbf{X}(t)\mathbf{Y}(t+\tau)]$$

- Ako su $\mathbf{X}(t)$ i $\mathbf{Y}(t)$ zajednički stacionarni u širem smislu onda je

$$R_{XY}(\tau)=E[\mathbf{X}(t)\mathbf{Y}(t+\tau)]$$

Ortogonalni slučajni procesi

- Definicija: Ako za dva slučajna procesa $\mathbf{X}(t)$ i $\mathbf{Y}(t)$ vrijedi

$$R_{XY}(t,t+\tau)=0$$

onda su $\mathbf{X}(t)$ i $\mathbf{Y}(t)$ ortogonalni slučajni procesi.

Nezavisni slučajni procesi

- Definicija: ako su dva slučajna procesa $\mathbf{X}(t)$ i $\mathbf{Y}(t)$ statistički nezavisna onda vrijedi

$$R_{XY}(t,t+\tau)=E[\mathbf{X}(t)]E[\mathbf{Y}(t+\tau)]$$

- Ako su dva procesa još i stacionarni u širem smislu onda je

$$R_{XY}(t,t+\tau)=\overline{\mathbf{X}}\overline{\mathbf{Y}}=\text{konst}$$

Svojstva kros-korelacijskih funkcija

- Kros-korelacijske funkcije imaju slijedeća svojstva

$$R_{XY}(-\tau) = R_{YX}(\tau)$$
$$|R_{XY}(\tau)| \le \sqrt{R_{XX}(0) R_{YY}(0)}$$
$$|R_{XY}(\tau)| \le \frac{1}{2}[R_{XX}(0) + R_{YY}(0)]$$

Auto-kovarijancijska funkcija

- Definicija: auto-kovarijancijska funkcija slučajnog procesa $\mathbf{X}(t)$ definirana je kao

$$C_{XX}(t, t+\tau) =$$
$$= E[\{\mathbf{X}(t) - E[\mathbf{X}(t)]\}\{\mathbf{X}(t+\tau) - E[\mathbf{X}(t+\tau)]\}]$$

- Ovaj izraz može se pisati i kao

$$C_{XX}(t, t+\tau) =$$
$$= R_{XX}(t, t+\tau) - E[\mathbf{X}(t)]E[\mathbf{X}(t+\tau)]$$

Kros-kovarijancijska funkcija

- Definicija: Kros-kovarijancijska funkcija dvaju slučajnih procesa $\mathbf{X}(t)$ i $\mathbf{Y}(t)$ definirana je izrazom:

$$C_{XY}(t, t+\tau) =$$
$$= E[\{\mathbf{X}(t) - E[\mathbf{X}(t)]\}\{\mathbf{Y}(t+\tau) - E[\mathbf{Y}(t+\tau)]\}]$$

- Izraz se može pisati i u slijedećoj formi

$$C_{XY}(t, t+\tau) =$$
$$= R_{XY}(t, t+\tau) - E[\mathbf{X}(t)]E[\mathbf{Y}(t+\tau)]$$

Slučaj stacionarnih procesa

- Za slučajne procese koji su zajednički stacionarni u širem smislu vrijede jednostavniji izrazi za auto-kovarijancijsku i kros-kovarijancijsku funkciju:

$$C_{XX}(\tau) = R_{XX}(\tau) - \overline{\mathbf{X}}^2$$
$$C_{XY}(\tau) = R_{XY}(\tau) - \overline{\mathbf{X}\mathbf{Y}}$$

Varijanca slučajnog procesa

- Definicija: varijanca slučajnog procesa je vrijednost auto-kovarijancijske funkcije za $\tau = 0$:

$$\sigma_x^2 = C_{XX}(t, t)$$

- Za proces koji je stacionaran u širem smislu vrijedi:

$$\sigma_x^2 = C_{XX}(t, t) = R_{XX}(0) - \overline{\mathbf{X}}^2 = \text{konst}$$

Nekorelirani slučajni procesi

- Definicija: Za dva slučajna procesa $\mathbf{X}(t)$ i $\mathbf{Y}(t)$ ako vrijedi

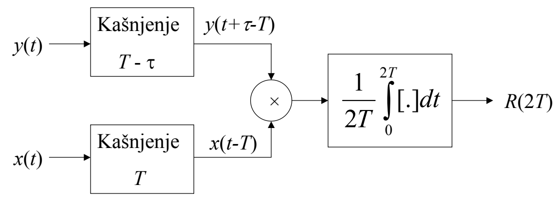
$$C_{XY}(t, t+\tau) = 0$$

onda su procesi nekorelirani.

Mjerenje korelacijske funkcije

- U praksi ne možemo nikada izmjeriti prave korelacijske funkcije dvaju procesa **X**(t) i **Y**(t) zato jer nikada nemamo sve realizacije procesa.
- Jedini način u tom slučaju je mjerenje vremenskim usrednjavanjem u dovoljno dugom intervalu i uz prepostavku da se radi o ergodičnom procesu.

Mjerenje kros-korelacijske funkcije



Blok dijagram sustava za mjerenje kros-korelacijske funkcije

Mjerenje kros-korelacijske funkcije

- Ako u trenutku $t = 0$ započinje integracija i ako promatramo izlaz $R(t)$ u trenutku $t = 2T$ onda

$$R(2T) = \frac{1}{2T}\int_0^{2T} x(t-T)\,y(t-T+\tau)\,dt$$
$$= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t')\,y(t'+\tau)\,dt'$$

- Dakle za T>> vrijedi $R(2T) \approx \mathrm{R}_{XY}(\tau) = R_{XY}(\tau)$

Mjerenje auto-korelacijske funkcije

- Ako na prethodnom blok dijagramu spojimo ulaze onda možemo mjeriti auto-korelacijsku funkciju slučajnog procesa pod pretpostavkom da je proces ergodičan.

Primjer

- Treba izmjeriti autokorelacijsku funkciju procesa iz ranijeg primjera

$$\mathbf{X}(t) = A\cos(\omega_0 t + \mathbf{\Theta})$$

gdje je $\mathbf{\Theta}$ uniformnog distribuirana slučajna varijabla u intervalu (0, 2π).

Primjer

- Izlaz sustava s blok dijagrama dan je izrazom:

$$R(2T) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} A^2 \cos(\omega_0 t + \Theta)\cos(\omega_0 t + \Theta + \omega_0 \tau)\,dt$$
$$= \frac{A^2}{4T}\int_{-T}^{T} [\cos(\omega_0 \tau) + \cos(2\omega_0 t + 2\Theta + \omega_0 \tau)]\,dt$$

gdje je Θ jedna realizacija slučajne varijable **Θ.**

Primjer

- Može se dakle vidjeti da je

$$R(2T) = R_{XX}(\tau) + \varepsilon(\tau)$$

gdje je

$$R_{XX}(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(\omega_0\tau)$$

prava vrijednost auto-korelacijske funkcije kao što je izvedeno u ranijem primjeru.

Primjer

- Drugi pribrojnik

$$\varepsilon(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(\omega_0\tau + 2\Theta)\frac{\sin(2\omega_0 T)}{2\omega_0 T}$$

je iznos pogreške koji ovisi o T.

- Ako pogreška mora biti 20× manja od najveće vrijednosti autokorelacijske funkcije onda

$$|\varepsilon(\tau)| \le 0.05 R_{XX}(0) \Leftrightarrow T \ge \frac{10}{\omega_0}$$

Primjeri slučajnih procesa

- U nastavku predstavit ćemo neke karakteristične slučajne procese:
  - Gaussov slučajni proces,
  - Bernoullijev proces,
  - slučajni hod,
  - Markovljev proces,
  - Poissonov proces.

Gaussov slučajni proces

- Definicija: Neka je za slučajni proces X(t) definirano N slučajnih varijabli $\mathbf{X}_1=\mathbf{X}(t_1)$, $\mathbf{X}_2=\mathbf{X}(t_2)$, …, $\mathbf{X}_N=\mathbf{X}(t_N)$ koje su definirane u N vremenskih trenutaka $t_1, t_2, \ldots, t_N$.
- Ako su za bilo koji N i trenutke $t_1, t_2, \ldots, t_N$ ove varijable zajednički Gaussove, tj. ako imaju gustoću vjerojatnosti N-tog reda danu izrazom

Gaussov slučajni proces

$$f_X(x_1,\ldots,x_N,t_1,\ldots,t_N) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\overline{\mathbf{x}})^T \mathbf{C}_x^{-1}(\mathbf{x}-\overline{\mathbf{x}})\right\}}{\sqrt{(2\pi)^N\,|\mathbf{C}_x|}}$$

gdje je vektor $\mathbf{x} = [x_1 \ldots x_N]^T$

te $\overline{\mathbf{x}} = [\overline{x}_1 \ldots \overline{x}_N]^T$

vektor srednjih vrijednosti, a

Gaussov slučajni proces

$$\mathbf{C}_x = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1N} \\ \vdots & & & \vdots \\ C_{N1} & C_{N2} & \cdots & C_{NN} \end{bmatrix}$$

kovarijancijska matrica čiji su elementi

$$C_{ij} = E[(\mathbf{X}_i - \overline{\mathbf{X}}_i)(\mathbf{X}_j - \overline{\mathbf{X}}_j)] = C_{xx}(t_i, t_k)$$

$$\overline{\mathbf{X}}_i = E[\mathbf{X}_i] = E[\mathbf{X}(t_i)]$$

Gaussov slučajni proces

- Iz definicije se vidi da je Gaussov slučajni proces određen s vektorom srednjih vrijednosti i kovarijancijskom matricom.
- Budući da vrijedi

$$C_{xx}(t_i,t_k)=R_{xx}(t_i,t_k)-E[\mathbf{X}(t_i)]E[\mathbf{X}(t_k)]$$

slijedi da je specifikacija Gaussovog procesa moguća pomoću auto-korelacijske funkcije R_{XX} slučajnog procesa i srednjih vrijednosti.

Gaussov slučajni proces

- Ako Gaussov proces nije stacionaran onda srednje vrijednosti i auto-korelacijska funkcija ovise o vremenu.

Gaussov slučajni proces

- Ako je Gaussov proces stacionaran u širem smislu srednja vrijednost je konstantna

$$\overline{\mathbf{X}}_i=E[\mathbf{X}(t_i)]=\text{konst.}$$

dok auto-kovarijancijska i auto-korelacijska funkcija ovise samo o razlikama vremena, a ne o apsolutnom vremenu:

$$C_{xx}(t_i,t_k)=C_{xx}(t_k-t_i)$$
$$R_{xx}(t_i,t_k)=R_{xx}(t_k-t_i)$$

Primjer

- Neka je dan Gaussov slučajni proces koji je stacionaran u širem smislu i koji ima sljedeću srednju vrijednost i auto-korelacijsku funkciju:

$$\overline{\mathbf{X}}=4$$
$$R_{xx}(\tau)=25e^{-3|\tau|}$$

- Treba odrediti funkciju gustoće vjerojatnosti trećeg reda za slučajne varijable

$$\mathbf{X}(t_i),\quad i=1,2,3,\quad t_i=t_0+\frac{i-1}{2}$$

Primjer

$$t_k-t_i=\frac{k-i}{2},\quad i,k=1,2,3$$

$$\Rightarrow R_{xx}(t_k-t_i)=25e^{-3\frac{|k-i|}{2}}$$
$$\Rightarrow C_{xx}(t_k-t_i)=25e^{-3\frac{|k-i|}{2}}-16$$

Primjer

- Elementi kovarijancijske matrice dani su kao:

$$\mathbf{C}_x=\begin{bmatrix}25-16 & 25e^{-\frac{3}{2}}-16 & 25e^{-\frac{6}{2}}-16\\ 25e^{-\frac{3}{2}}-16 & 25-16 & 25e^{-\frac{3}{2}}-16\\ 25e^{-\frac{6}{2}}-16 & 25e^{-\frac{3}{2}}-16 & 25-16\end{bmatrix}$$

Primjer

- Sada kad su poznate srednje vrijednosti i kovarijancijska matrica može se pisati izraz za funkciju gustoće vjerojatnosti trećeg reda za tražene tri slučajne varijable:

$$f_X(x_1,x_2,x_3,t_1,t_2,t_3)=\frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\overline{\mathbf{x}})^T\mathbf{C}_x^{-1}(\mathbf{x}-\overline{\mathbf{x}})\right\}}{\sqrt{(2\pi)^N\,|\mathbf{C}_x|}}$$

Jednostavni diskretni slučajni procesi

- U nastavku ćemo prezentirati dva jednostavna slučajna procesa:
  – Bernoullijev proces,
  – slučajni hod.

Bernoullijev proces

- Koristi se i izraz Bernoullijev slučajni niz.
- Definicija: niz

$$\mathbf{X}(n),\quad -\infty<n<\infty$$

nezavisnih slučajnih varijabli koje poprimaju dvije vrijednosti +1 i –1 s vjerojatnostima p i $1\!-\!p$ zove se Bernoullijev proces. Ako je $p = 0.5$ proces se zove binarni bijeli šum.

Primjer

- Primjer: Kod linearnog prediktivnog kodiranja kodira se razlika između ulazne vrijednosti signala i predikcije na temelju prethodnih vrijednosti uzoraka signala.
- Ako se ta razlika kodira pomoću jednog bita (delta modulacija) onda se taj niz može modelirati kao Bernoullijev niz.
- Bernoullijev proces je stacionaran i ergodičan.

Slučajni hod

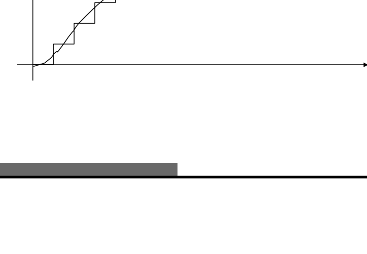
- Definicija: Slučajni niz definiran izrazom

$$Y(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}\mathbf{X}(k),\quad -\infty<n<\infty$$

gdje je $\mathbf{X}(k)$ Bernoullijev proces koji poprima vrijednosti +1, –1 s vjerojatnostima p i $1\!-\!p$ zove se slučajni hod.

Primjer slučajnog hoda

- Kod rekonstruiranja Delta moduliranog signala se sumiraju razlike (+1 i –1).



Markovljev proces

- Bernoullijev proces je niz čiji su uzorci nezavisne slučajne varijable.
- To u nekim primjenama dobro opisuje realnu situaciju.
- Takva pretpostavka nije dobra za modeliranje svih binarnih nizova (neki su nizovi zavisni).

Markovljev proces

- Najjednostavniji oblik zavisnosti je kad vjerojatnost nekog uzorka ovisi o vrijednosti prethodnog uzorka.
- Ovakav tip slučajnog procesa zove se Markovljev slučajni proces.
- To je dobar model za veliki broj praktičnih problema (primjer: nizovi točaka u slici).

Markovljev proces

- Markovljev proces ne mora biti binaran - može poprimati bilo kakve vrijednosti (kontinuirane ili diskretne).

Markovljev proces

- Definicija: Slučajni proces je Markovljev proces ako uvjetna distribucija slučajne varijable **X**(n) uz danu prošlost $n' < n$ ovisi samo o prethodnom uzorku **X**(n - 1)

$$f_{\mathbf{X}(n)|\mathbf{X}(n-1),\mathbf{X}(n-2),\ldots}(x_n \mid x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots) = f_{\mathbf{X}(n)|\mathbf{X}(n-1)}(x_n \mid x_{n-1})$$

Markovljev lanac

- Kada **X**(n) poprima vrijednosti iz konačnog skupa vrijednosti onda se takav Markovljev proces zove Markovljev lanac.

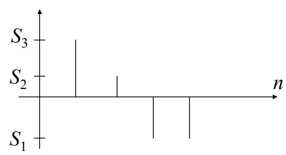
Markovljev lanac

- Definicija: Slučajni proces koji poprima vrijednosti na konačnom skupu je Markovljev lanac ako zadovoljava uvjet:

$$P\left[(\mathbf{X}(n) = x_n) \mid (\mathbf{X}(n-1) = x_{n-1}), (\mathbf{X}(n-2) = x_{n-2}), \ldots\right] = P\left[(\mathbf{X}(n) = x_n) \mid (\mathbf{X}(n-1) = x_{n-1})\right]$$

Markovljev lanac

- Neka je skup mogućih vrijednosti $\{S_1, S_2, \ldots, S_Q\}$
- Kada je $\mathbf{X}(n) = S_i$ kaže se da je Markovljev lanac u stanju i.



Markovljev lanac

- Prijelazne vjerojatnosti definirane su kao:

$$P_{j|i}(n) = P[(\mathbf{X}(n) = S_j) \,|\, (\mathbf{X}(n-1) = S_i)]$$

- Pretpostavimo da su prijelazne vjerojatnosti konstantne (neovisne od n) i oblika:

$$P_{j|i} = P[(\mathbf{X}(n) = S_j) \,|\, (\mathbf{X}(n-1) = S_i)]$$

- Tada se sve prijelazne vjerojatnosti mogu prikazati matricom **P** čiji su elementi $P_{j|i}$

Markovljev lanac: Primjer

- Q = 3 (tri stanja):

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{1|1} & P_{2|1} & P_{3|1} \\ P_{1|2} & P_{2|2} & P_{3|2} \\ P_{1|3} & P_{2|3} & P_{3|3} \end{bmatrix}$$

- Gornja matrica naziva se stohastička matrica.

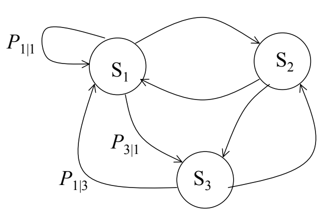
Markovljev lanac: Primjer

- Često se koristi i prijelazna matrica:

$$\Pi = \mathbf{P}^T = \begin{bmatrix} P_{1|1} & P_{1|2} & P_{1|3} \\ P_{2|1} & P_{2|2} & P_{2|3} \\ P_{3|1} & P_{3|2} & P_{3|3} \end{bmatrix}$$

Markovljev lanac: Primjer

- Ovakav Markovljev lanac može se prikazati i prijelaznim dijagramom stanja:



Poissonov slučajni proces

- Poissonov proces funkcijom vremena opisuje koliko se je puta neki događaj dogodio.
- Događaj se događa u slučajnim vremenskim trenucima.
- Primjer događaja može biti:
  - dolazak klijenta u banku ili na blagajnu samoposluživanja,
  - kvar u sustavu.

Poissonov slučajni proces

- Poissonov proces je diskretni slučajni proces zato jer vrijednost poprima diskretne iznose 1,2,3, …
- Zato se ovaj proces zove i Poissonov proces brojanja.

Poissonov slučajni proces

- Za definiciju Poissonovog procesa treba ispuniti dva uvjeta:
  - događaj se može zbiti samo jednom u svakom infinitezimalno kratkom vremenskom trenutku,
  - trenuci moraju biti statistički nezavisni.

Poissonov slučajni proces

- Iz ova dva uvjeta slijedi da je broj događaja u bilo kojem konačnom intervalu opisan Poissonovom distribucijom:

$$P[X(t)=k]=\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}, \quad k=0,1,2,\ldots$$