Teorija signala

Prof. dr. sc. Hrvoje Babić,
Prof. dr. sc. Damir Seršić
ZESOI - FER

Literatura

- WEB: http://ts.zesoi.fer.hr
- H. Babić: *Signali i sustavi*, Zavodska skripta FER, Zagreb, 1996.
  http://sis.zesoi.fer.hr, 2002.
- F. de Coulon: *Signal Theory and Processing*, Artech House, Dedham, 1986.
- L.E. Franks: *Signal Theory*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1969.
- A. Papoulis: *Signal Analysis*, McGraw-Hill, 1977.

Prvi dio: osnove

- Klase signala i sustava
  - Vremenski kontinuirani i diskretni
- Bezmemorijski sustavi
  - Funkcijski i relacijski blokovi
- Memorijski sustavi
  - Memorijske i predikcijske operacije
  - Model s varijablama stanja
- Odziv linearnih sustava

Signal

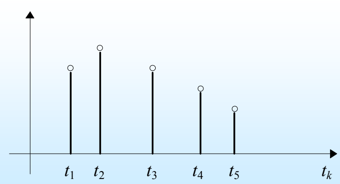
- Signal: fenomen koji nosi neku informaciju.
- Signale - vremenske funkcije označavat ćemo malim slovima - x, v, u.
- Trenutna vrijednost: $u(t)$, $t \in \mathbf{R}$.
- Ako je t ograničen na $\mathbf{T} \subset \mathbf{R}$, onda je signal u preslikavanje u: $\mathbf{T} \to \mathbf{U}$, gdje je $\mathbf{T}$ domena, a $\mathbf{U}$ kodomena od u.
  - $u = \{(t, u(t)) \mid t \in \mathbf{T}\}$.

Klasa signala

- Neka je $\mathcal{U}$ skup svih signala iz $\mathbf{T}$ na $\mathbf{U}$.
- Tada je signal u varijabla iz klase signala $\mathcal{U}$.
- Razlikujemo:
  - kodomena od $u(t)$ je $\mathbf{U}$ (skup brojeva) ,
  - kodomena od u je $\mathcal{U}$ (skup funkcija).

Kontinuirani i diskretni signali

- Ako je domena $\mathbf{T}$ neprebrojiv i neprekinut (kontinuiran) skup, onda se radi o vremenski kontinuiranom signalu.
- Ako je domena $\mathbf{T}$ prebrojiv skup trenutaka $\{t_0, t_1, t_2, \dots, t_k\}$, onda je to vremenski diskretan signal.



Diskretna vremenska varijabla

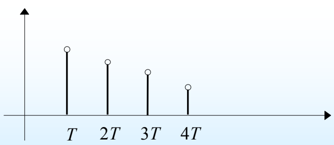
- Trenutke t_k možemo poredati u rastući niz
  $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots$,
- tj. uvesti indeksaciju skupa **T**, $t_k \in \mathbf{T}$.
- Trenutke pridružujemo skupu cijelih brojeva
  $t: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R}$.
- t_k ili $t(k)$ je vrijednost t na cijelom broju $k \in \mathbf{Z}$, gdje je k indeks ili korak niza.
- $t = \{(k, t_k) \mid k \in \mathbf{K}\}; \quad \mathbf{K} \subseteq \mathbf{Z}$.

Diskretna vremenska varijabla...

- Nizove vrem. trenutaka označavamo kao
  $\ldots, t_{-1}, t_0, t_1, t_2, \ldots$ ili
  $\{t(k)\}, k \in \mathbf{Z}$ ili
  $\{t_k\}, \quad k \in \mathbf{Z}$
- Najjednostavniji primjer: aritmetički niz
- $t = \{t_0, t_0+T, t_0+2T, \ldots\}$,
- gdje je T konstanta (kvant vremena).

Jednolika diskretizacija vremena

- $t_k = T\,k \quad k \in \mathbf{Z}$.



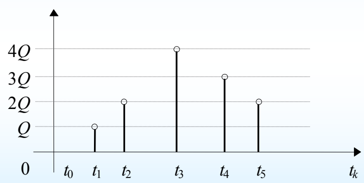
Amplitude signala

- Ako je područje amplituda signala $\mathbf{U} \subset \mathbf{R}$, neprebrojiv i kontinuiran skup, signal je nekvantiziran ili analogan.
- Ako je područje amplituda signala prebrojiv skup $\mathbf{U} = \{\ldots, u_{-2}, u_{-1}, u_0, u_1, u_2, \ldots\}$, signal je kvantiziran.

Diskretizacija amplitude

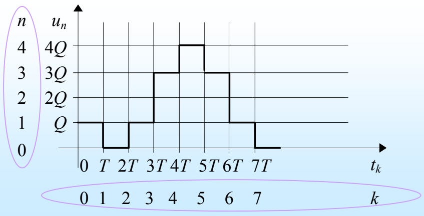
- Indeksacija amplituda u_n je preslikavanje
  $u: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{U}$,
- $u = \{u_n \mid n \in \mathbf{N}\}, \mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z}$.
- Najjednostavniji primjer: aritmetički niz
- $u = \{\ldots, a_0-Q, a_0, a_0+Q, a_0+2Q, \ldots\}$,
- gdje je Q konstanta (kvant amplitude).
- $u_n = Q\,n \quad n \in \mathbf{N}$.

Diskretizacija amplitude...



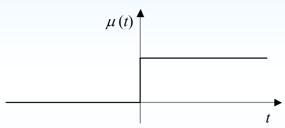
Diskretizacija...

- Jednoliko diskretiziran signal (po vremenu i po amplitudi) može se izraziti samo skupovima indeksa k i n (uz poznate T i Q).
- $u = \{n(k)\},\ k \in \mathbf{K} \subseteq \mathbf{Z},\ n \in \mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z}.$



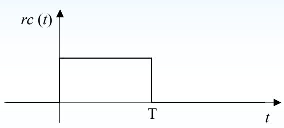
Kontinuirani signali

Aperiodični signali



Stepenica

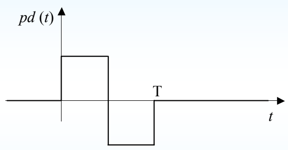
$$\mu(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



Pravokutni puls

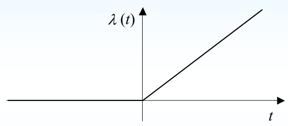
$$rc(t) = \mu(t) - \mu(t - \mathrm{T})$$

Aperiodični signali



Pulsni dublet

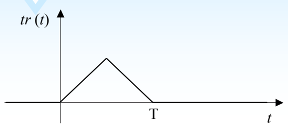
$$pd(t) = \mu(t) - 2\mu(t - \mathrm{T}/2) + \mu(t - \mathrm{T})$$



Kosina

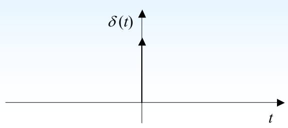
$$\lambda(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Aperiodični signali



Trokutni puls

$$tr(t) = \lambda(t) - 2\lambda(t - \mathrm{T}/2) + \lambda(t - \mathrm{T})$$



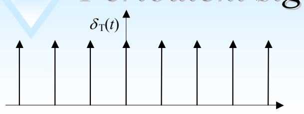
Impuls

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = 1$$

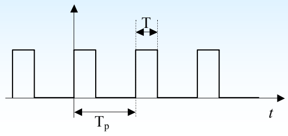
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\varphi(t)\,dt = \varphi(0)$$

Periodični signali



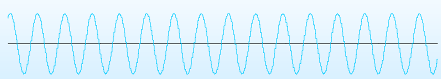
Impulsni niz

$$\delta_{\mathrm{T}}(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - k\mathrm{T})$$



Pulsni niz

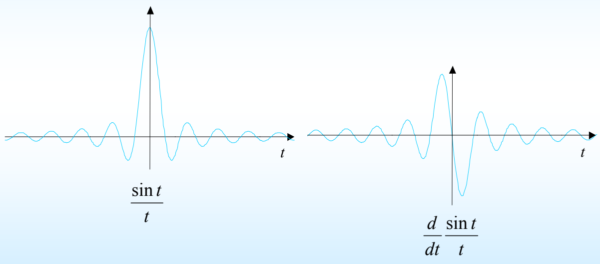
$$\sum_{-\infty}^{+\infty} p(t - k\mathrm{T})$$



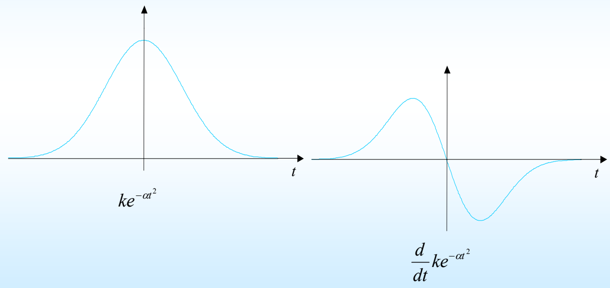
Sinusoida

$$x(t) = a\sin(\omega t + \varphi)$$

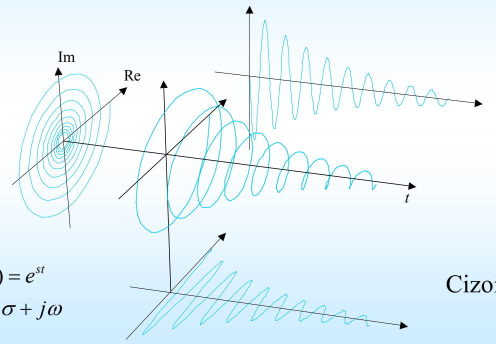
Aperiodični signali



Aperiodični signali



Aperiodični signali

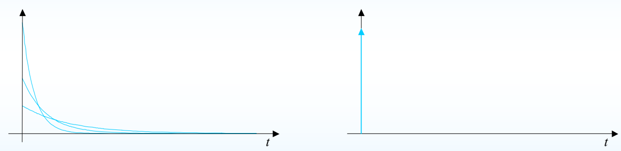


$x(t) = e^{st}$

$s = \sigma + j\omega$

Cizoida

Aperiodični signali



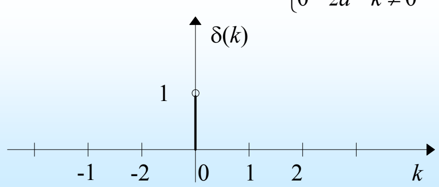
$$\lim_{\tau \to 0}\left(\frac{1}{\tau}e^{t/\tau}\right) \longrightarrow \delta(t)$$

Osnovni diskretni signali (nizovi)

Jedinični niz (Niz s jediničnim članom ili uzorkom, Kroneckerov delta, δ–niz)

δ = ..., 0, 0, 1, 0, 0, ...

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & za \quad k = 0, k \in \mathbb{Z} \\ 0 & za \quad k \neq 0 \end{cases}$$

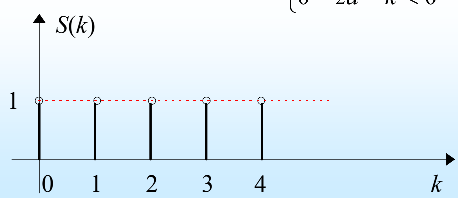


Osnovni diskretni signali (nizovi)

Jedinična stepenica (Heavisideov niz)

S = ..., 0, 0, 1, 1, 1, ...

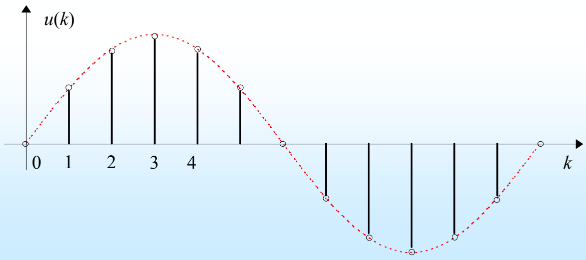
$$S(k) = \begin{cases} 1 & za \quad k \geq 0, \; k \in \mathbb{Z} \\ 0 & za \quad k < 0 \end{cases}$$



Osnovni diskretni signali (nizovi)

Sinusni niz

$u(k) = U \cos(\omega T_0 k + \zeta)$, gdje je ω frekvencija dodirnice



Osnovni diskretni signali (nizovi)

$u(k) = U \cos(\Omega k + \zeta), \quad k \in Z$

U - amplituda $\quad \zeta$ - faza

$\Omega = \omega T_0$ - korak argumenta u radianima analogan frekvenciji

Svojstva sinusnog niza

Za $\Omega = 2\pi - \Delta$ izlazi

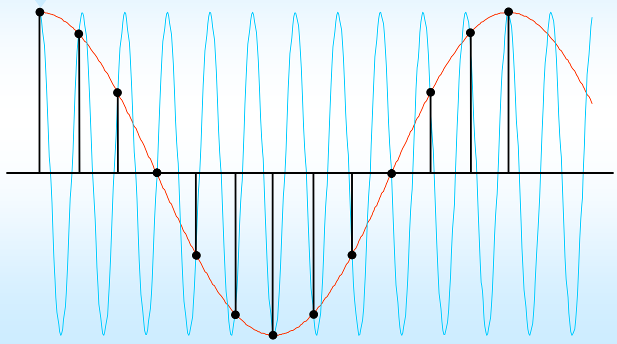
$u(k) = \cos(2\pi - \Delta)k = \cos(-\Delta k) = \cos \Delta k$

Iz raspoloživog niza se ne može razlikovati da li je frekvencija dodirnice

$\Omega_1 = 2\pi - \Delta \quad$ ili $\quad \Omega_2 = \Delta$

$u(k) = \cos(\Omega k + \zeta), \quad k \in Z$

$\Omega_1 = \pi / 6 \qquad \Omega_2 = 11\pi / 6$



Svojstva sinusnog niza

Vidi se da se iz ovog niza ne može razlikovati frekvencija Ω_1 od bilo koje

$\Omega_n = \Omega_1 + 2n\pi \;,\; n \in Z$ jer je

$\cos[(\Omega_1 + 2n\pi)k] = \cos(\Omega_1 k + 2nk\pi) = \cos(\Omega_1 k) \qquad n, k \in Z$

Da bi se Ω mogao odrediti jednoznačno iz niza moramo biti sigurni da je $|\Omega| < \pi$, odnosno $\omega < \pi / T_0$ ili $2f < 1 / T_0$.

Operacije na signalu, sustav

- Promjene na signalu se događaju kad signal prolazi kroz medij ili sustav.
- Sustav je cjelina sastavljena od međusobno povezanih objekata gdje svojstva objekata i njihovo međudjelovanje određuju svojstva i vladanje cjeline.
- Multidisciplinarni problem: odrediti, podesiti, predvidjeti vladanje sustava, ili pak realizirati sustav željenih svojstava.

Preslikavanje signala

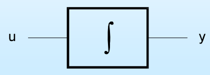
- Jednostavno preslikavanje - kompozicija funkcija:
- $v(t) = f(u(t)), \quad v = f(u), \quad u \in \mathcal{U}, v \in \mathcal{V}.$
- Trenutna vrijednost preslikava se u trenutnu.
- Složenije preslikavanje - operator pridružuje signalu drugi signal:
- $v = \boldsymbol{F}(u), \qquad u \in \mathcal{U}, v \in \mathcal{V}.$

Složeno preslikavanje...

- Neka $\boldsymbol{F}$ preslikava signal u iz intervala $[t_1, t_2]$ u signal v u intervalu $[t_1, t_2]$.

$$v_{[t_1,t_2]} = \boldsymbol{F}\left(u_{[t_1,t_2]}\right)$$

- Trenutna vrijednost $v(t)$, uz $t \in [t_1, t_2]$ zavisi od svih trenutnih vrijednosti $u(\tau)$ iz intervala $\tau \in [t_1, t_2]$!



$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} u(\tau)d\tau$$

Složeno preslikavanje...

- Trenutna vrijednost $v(t)$ može se izraziti kao:

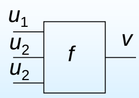
$$v(t) = F\left(u_{[t_1,t_2]}, t\right)$$

- gdje je F funkcional koji funkciji u na intervalu $[t_1, t_2]$ pridružuje broj $v(t)$.
- Posebice su zanimljive 2 mogućnosti:
  - $v(t)$ ovisi od segmenta $[t_1, t)$ - prije t, ili
  - $v(t)$ ovisi od segmenta $(t, t_2]$ - poslije t.
- Trenutci t_1, t_2 mogu biti i u beskonačnosti.

Operacije među signalima

- Djelovanje više signala na jedan rezultirajući može se opisati funkcijom: $v(t) = f(u_1(t), u_2(t), u_3(t),...)$.
- Općenito, to je nelinearna funkcija, npr.

$$v(t) = [u_1(t)]^{u_2(t)},$$



- ili linearna, npr.

$$v(t) = \alpha u_1(t) + \beta u_2(t).$$

Operacije među signalima

- Elementarne operacije - ne mogu se dalje razlagati.
- Važne elementarne operacije:
  - zbrajanje $\quad v = u_1 + u_2$
  - množenje $\quad v = u_1\, u_2$
- Razlaganje f na elementarne operacije - Taylorov red s konačnim brojem članova.

Osnovne operacije na nizovima i elementi diskretnog sustava

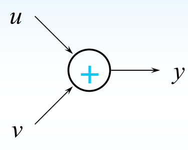
Zbrajanje nizova

Zbroj dva niza $y = u + v$ ili

$\{y(k)\} = \{u(k)\} + \{v(k)\}$

je niz s općim članom

$y(k) = u(k) + v(k)$ za svaki $k \in \mathbb{Z}$.



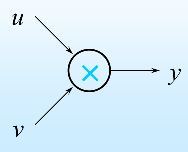
Produkt nizova

Produkt dva niza $y = u\, v$ ili

$\{y(k)\} = \{u(k)\}\ \{v(k)\}$

je niz s općim članom

$y(k) = u(k) \cdot v(k)$ za svaki $k \in \mathbb{Z}$.



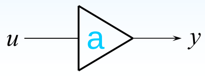
Osnovne operacije na nizovima i elementi diskretnog sustava

Množenje s konstantom

$y = a\,u$ ili

$\{y(k)\} = a\{u(k)\} = \{a\,u(k)\}$

$y(k) = a\,u(k)$ za svaki $k \in \mathbb{Z}$.



Funkcijski blok

$y = f(u)$ ili

$\{y(k)\} = f[\{u(k)\}]$

$y(k) = f[u(k)]$ za svaki $k \in \mathbb{Z}$.

Klasifikacija sustava

- Bezmemorijski ili trenutni
  $y(t) = f(t, u(t))$,
- memorijski ili kauzalni
  $y(t) = F(t, u_{(-\infty, t]})$,
- prediktivni (anticipativni) ili antikauzalni
  $y(t) = F(t, u_{[t, \infty)})$,
- memorijsko-prediktivni ili nekauzalni
  $y(t) = F(t, u_{(-\infty, \infty)})$.
- Nekauzalni sustavi često se dobivaju pri sintezi sustava, uslijed idealiziranih zahtjeva.

Spajanje sustava

- Sustav se predstavlja kao blok
- Sustav s više ulaza i izlaza može se jednostavno razložiti na više sustava s više ulaza, ali samo s po jednim izlazom.
- Dva i više objekata ili podsustava mogu se spojiti tako da zajedno čine jedan složeni sustav.
- Sustavi od kojih je sastavljen složeni sustav zovu se podsustavi.

Pravila spajanja

- Izlazi iz blokova se ne spajaju međusobno.
- Svaki ulaz bloka spaja se na izlaz nekog bloka ili je ulaz u spojeni složeni sustav. Svi ulazi podsustava su angažirani.
- Izlaz bloka može biti izlaz složenog sustava. Najmanje jedan izlaz podsustava je izlaz spojenog sustava.

Kontinuirani sustavi bez memorije

- Izlaz u trenutku *t* ovisi samo o vrijednosti ulaznog signala u trenutku *t*
- Elementi sustava prikazani funkcijskim blokom
- Funkcijski blok opisan funkcijom

$$y(t) = f(u_1(t), u_2(t), \ldots, u_m(t))$$
$$y(t), u_i(t) \in R$$

Sustav u konačnom intervalu

- Vladanje sustava uglavnom pratimo na konačnom vremenskom intervalu

  $$(t_0, t]$$

  koji nazivamo interval promatranja.
- Zanima nas, dakle, odsječak odziva

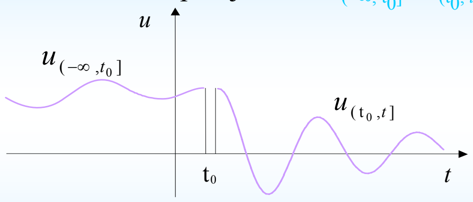
  $$y_{(t_0, t]}$$

  kao posljedica odsječka pobude

  $$u_{(t_0, t]}.$$

Sustav u konačnom intervalu

- Pobuda se može podijeliti na $u_{(-\infty,\, t_0]}$, $u_{(t_0,\, t]}$.



- Izlaz sustava u $(t_0, t]$ je posljedica oba segmenta

$$y(t) = F(u_{(-\infty,\, t_0]}, u_{(t_0,\, t]})\ ,\ t > t_0.$$

$$y(t) = F\left(x_0, u_{(t_0, t]}\right)$$

Memorijske i predikcijske operacije diskretnog sustava

Pomak niza - jedinični pomak daje iz ulaznog niza, niz pomaknut za jedan korak.

unaprijed (predikcija)

$u \to \boxed{\mathrm{E}} \to y$

$y = \mathrm{E}\, u$ ili $\{y(k)\} = \mathrm{E}\ \{u(k)\}$

$y(k) = (\mathrm{E}u)(k)$

$y(k) = u(k+1) \quad k \geq 0.$

unatrag (kašnjenje i pamćenje)

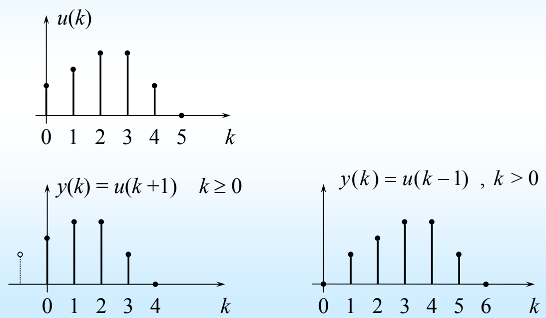
$u \to \boxed{\mathrm{E}^{-1}} \to y$

$y = \mathrm{E}^{-1} u$ ili $\{y(k)\} = \mathrm{E}^{-1}\{u(k)\}$

$y(k) = (\mathrm{E}^{-1}u)(k)$

$y(k) = u(k-1) \quad k > 0.$

Operacija pomaka niza unaprijed traži nekauzalan sustav pa je neostvariva.
Zato se u sustavima služimo redovito jedinicama za kašnjenje, odnosno operacijom E^{-1}.



Diferencija niza

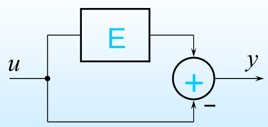
uzlazna

$u \to \boxed{\Delta} \to y$

$y = \Delta\, u$ ili $\{y(k)\} = \Delta\ \{u(k)\}$

$y(k) = (\Delta u)(k) = u(k+1) - u(k)$

$\{y(k)\} = (\mathrm{E} - 1)\{u(k)\}$



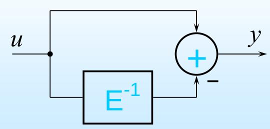
silazna

$u \to \boxed{\nabla} \to y$

$y = \nabla u$ ili $\{y(k)\} = \nabla\{u(k)\}$

$y(k) = (\nabla u)(k) = u(k) - u(k-1)$

$\{y(k)\} = (1 - \mathrm{E}^{-1})\{u(k)\}$



Diferencija višeg reda

$$\Delta^n\{u(k)\} = (\mathrm{E}-1)^n\{u(k)\} = \sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}\mathrm{E}^{n-r}\{u(k)\}$$

$$\nabla^n\{u(k)\} = (1-\mathrm{E}^{-1})^n\{u(k)\} = \sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}\mathrm{E}^{-r}\{u(k)\}$$

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Akumulacija niza

$u \to \boxed{\Sigma} \to y$

Antidiferencijski operator Δ^{-1} daje niz

$\{y(k)\} = \Delta^{-1}\{u(k)\}$ takav da je $\Delta\{y(k)\} = \{u(k)\}$

Može se pokazati da vrijedi $\Delta\left\{\sum_{j=0}^{k-1} u(j) + K\right\} = \{u(k)\}$

Za slučaj kauzalnih signala $\left(\sum_{j=0}^{k} u(j) + K\right) - \left(\sum_{j=0}^{k-1} u(j) + K\right) = u(k)$

Prema tome

$$\Delta^{-1}\{u(k)\} = \left\{\sum_{j=0}^{k-1} u(j) + K\right\} \qquad y(k) = \begin{cases} y(0)\ , & k = 0 \\ y(0) + \sum_{j=0}^{k-1} u(j)\ , & k > 0 \end{cases}$$

Linearni sustavi

Linearni sustavi

- Princip superpozicije
- Superpozicijski integral i sumacija
- Odziv sustava na impuls i uzorak
- Konvolucijski integral i sumacija
- Karakteristične funkcije linearnog sustava
- Stabilnost linearnog sustava

- Sustav: skup operacija na signalu

$$y = F(u)$$

- Analiza sustava: odziv poznatog sustava na traženu pobudu

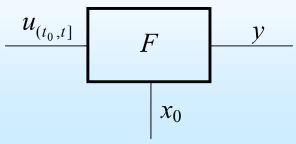
$$F, u \rightarrow y$$

- Sinteza sustava: sustav željenog odziva na traženu pobudu

$$y, u \rightarrow F$$

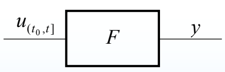
- Za odziv sustava počevši od nekog trenutka t_0 treba početno stanje x_0 i pobuda $u_{(t_0,t]}$

$$y(t) = F\left(x_0, u_{(t_0,t]}\right)$$

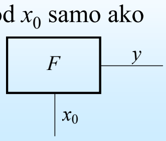


- Budući da je odziv posljedica dvaju nezavisnih uzroka x_0 i $u_{(t_0,t]}$ imamo

a) jednoznačnu zavisnost odziva od pobude samo ako je početno stanje nula $x_0 = 0$



b) jednoznačnu zavisnost odziva od x_0 samo ako sustav nije pobuđen tj. $u(t) = 0$ za $\forall t$



- Sustav može biti vremenski *kontinuiran* ili *diskretan* zavisno od toga da li su varijable sustava funkcije od neprebrojivog ili prebrojivog skupa trenutaka
- Sustav je vremenski stalan ako vremenski pomak pobude za konstantno vrijeme $u(t-t_0)$ uzrokuje samo isti vremenski pomak odziva $y(t-t_0)$
- Druga bitna klasifikacija sustava je na *linearan* i *nelinearan* sustav

Linearni sustavi

- Da bi sustav s jednim ulazom i jednim izlazom $y = F(x)$ bio linearan treba zadovoljiti

(i) uvjet homogenosti:

$$F(ax) = aF(x)$$

- Ako je y odziv sustava na x ($y = F(x)$) tada je ay odziv sustava na ax za svaki a. $\quad x \to y, \quad ax \to ay$

(ii) uvjet aditivnosti

$$F(x_1 + x_2) = F(x_1) + F(x_2)$$

- Ako je $y_i = F(x_i)$ odziv na x_i, tada je $y_1 + y_2$ odziv na $x_1 + x_2$. $\quad x_i \to y_i, \quad x_1 + x_2 \to y_1 + y_2$

- Oba uvjeta napisana zajedno

$$F(ax_1 + bx_2) = aF(x_1) + bF(x_2)$$

daju princip superpozicije

- On je nužan i dovoljan uvjet, da je sustav linearan (inače je sustav nelinearan)

Linearne operacije na signalima

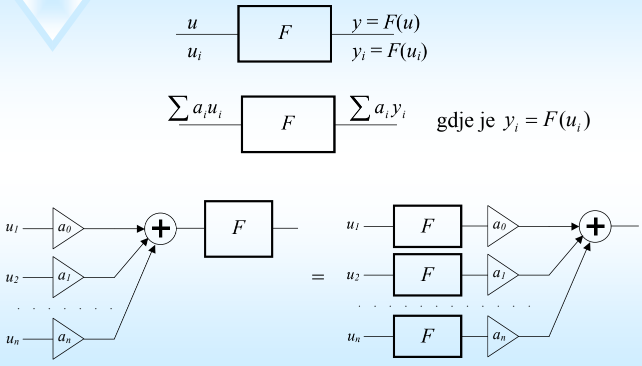
- Pretpostavimo složeni signal predstavljen linearnom kombinacijom od N elementarnih signala

$$u(t) = \sum_{i=1}^{N} a_i u_i(t), \quad t \in \mathbf{R}, i \in \mathbf{Z}$$

- Preslikavanjem linearnim operatorom F može se jednostavno odrediti korištenjem principa superpozicije

$$v = F\left(\sum_{i=1}^{N} a_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{N} a_i F(u_i) = \sum_{i=1}^{N} a_i v_i$$

gdje je $v_i = F(u_i)$, dobiven preslikavanjem samo komponente u_i, odnosno odzivom sistema na u_i.



- Za trenutne vrijednosti $u(t)$ možemo napisati

$$u(t) = \sum_{i=1}^{N} a(i) u(t,i) \to v(t) = \sum_{i=1}^{N} a(i) v(t,i)$$

- Ovo je oblik superpozicije ili transformacije gdje je domena signala kontinuirana, a parametar cijeli broj
- signal u je jednoznačno određen skupom ili nizom amplituda u_i

---

- Ako skup elementarnih funkcija $\{u_i\}$ postane posve gust odnosno parametar λ neprebrojiv, težinska konstanta postaje kontinuirana funkcija parametra $a(\lambda)$, a sumacija integral

$$v(t) = \int a(\lambda) v(t,\lambda) d\lambda$$

- Signal v je predstavljen integralom elementarnih signal $u(t, \lambda)$ s težinskom funkcijom $a(\lambda)$ – spektrom, kojom je jednoznačno određen

- Primjena linearnog operatora $y = F(v)$ na izvorni signal daje

$$y = F(v) = F\left(\int_{-\infty}^{+\infty} a(\lambda)u(\cdot,\lambda)d\lambda\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(\lambda)F\big(u(\cdot,\lambda)\big)d\lambda$$

$$y = \int_{-\infty}^{+\infty} a(\lambda)z(\cdot,\lambda)d\lambda$$

gdje je $F\big(u(\cdot,\lambda)\big) = z(\cdot,\lambda)$

- Za trenutne vrijednosti signala $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(\lambda)z(t,\lambda)d\lambda$ koji se naziva superpozicijski integral. Pogodan je za analizu vremenski promjenjivih sustava.

- Slično možemo predstaviti vremenski diskretan vremenski sustav $v(k)$ s elementarnim nizovima v_i

$$v[k] = \sum a_i v_i = \sum a[i]v[k,i]$$

- Primjenom operatora F možemo dobiti

$$y = F\left(\sum_{i=1}^{N} a[i]u[\cdot,i]\right) = \sum_{i=1}^{N} a[i]F\big(u[\cdot,i]\big) = \sum_{i=1}^{N} a[i]v[\cdot,i]$$

gdje je $v[k,i] = \{F(u[\cdot,i])\}$

- Za uzorke izlazi $y[k] = \sum_{i=1}^{N} a[i]v[k,i]$ superpozicijska sumacija pogodna za analizu vremenski promjenjivih sustava.

- Superpozicijski integral i sumaciju smo dobili iz principa superpozicije
- Dovest ćemo ih u vezu s odzivom sustava na jedinični uzorak $\delta[k]$ i jedinični impuls $\delta(t)$
- Pretpostavimo neki signal $u[k]$ nizom uzoraka

$$u[k] = \sum_{-\infty}^{+\infty} a[i]\delta[k-i]$$

- Budući da je

$$\delta[k-i] = \begin{cases} 1 & \text{za } k = i \\ 0 & \text{za } k \neq i \end{cases}$$

- Pa izlazi za $k = i$ da je $a(i) = u(i)$
- Svaki niz se dade rastaviti na jedinične uzorke

$$u[k] = \sum_{-\infty}^{+\infty} u[i]\delta[k-i]$$

- Primjena operatora vodi na

$$y(k) = \sum u[i]h[k,i] \quad \text{gdje je} \quad h[k,i] = \big(F(\delta[k,i])\big)$$

- Isto tako možemo razložiti signal na sumu ili integral impulsa kao niza elementarnih funkcija

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(\lambda)\delta(t-\lambda)d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\lambda)\delta(t-\lambda)d\lambda$$

- Nakon primjene linearnog operatora F na gornju prezentaciju signala, izlazi superpozicijski integral

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\lambda)h(t,\lambda)d\lambda$$

gdje je $h(t, \lambda)$ odziv sustava na impuls u trenutku $t - \lambda$.

- U slučaju vremenski stalnih sustava $h(\mathrm{t}, \tau)$ je uvijek isti samo kasni za τ koliko kasni i pobudna δ funkcija tj.

$$h(t,\tau) = h(t-\tau)$$

- Superpozicijski integral dobiva oblik koji se naziva konvolucijski integral

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

- Operacija između h i u naziva se konvolucijom

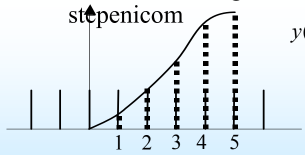
- Za vremenski diskretne sustave dobiva se oblik

$$y[k]=\sum_{-\infty}^{+\infty}u[i]h[k-i]=\sum_{-\infty}^{+\infty}h[i]u[k-i]$$

koji se naziva konvolucijskom sumacijom

Svojstva konvolucijske sumacije i integrala

- konvolucijsko preslikavanje vrijedi za sve linearne vremenski stalne sustave koji se zato nekad nazivaju konvolucijski sustavi
- Odziv diskretnog sustava s $h(k) = h(k)$ na pobudu stepenicom

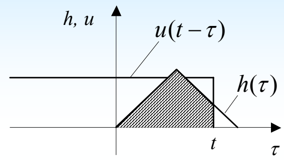


$$y(4)=\sum_{0}^{4}h(i)\mu(k-i)=$$
$$=2.5\{0\cdot 1+1\cdot 1+2\cdot 1+3\cdot 1+2\cdot 1\}=$$
$$=2.5\{8\} \qquad k-i\geq 0$$

- Za kauzalan odziv $h[k] = 0$, i kauzalnu pobudu u$[k] = 0$ za $k < 0$.
- Odziv na stepenicu dobiva se akumulacijom uzoraka odziva na uzorak $\sum_{0}^{k}h(i)$
- Konvolucijski integral preslikava funkciju pobude u u funkciju odziva y, tako da je trenutna vrijednost odgovarajuće $y(t)$ određena integralom, odnosno cijelim tijekom odziva h i pobude u
- Vidimo da je to zaista preslikavanje funkcije u funkciju y.

- Uzmimo kao primjer

$$y(t)=\int_{0}^{t}h(\tau)u(t-\tau)d\tau$$



- Na vrijednost $y(t)$ utječe pobuda iz intervala $(0, t)$
- Iz primjera i izraza se vidi da bi se izvršila konvolucija i dobila vrijednost $y(t)$ za trenutak t treba izvršiti sljedeće:
  1. Vremensku inverziju signala na osi τ
  2. Multiplikaciju signala kako stoje
  3. Integrirati produkt od 0 do t

- Iz primjera se vidi da je odziv na stepenicu integral impulsnog odziva

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)\mu(t-\tau)d\tau=\int_{0}^{t}h(\tau)d\tau$$

- Granice integrala proizlaze iz kauzalnosti pobude i impulsnog odziva

$$h(t)=0 \quad \text{za } \tau<0$$
$$\mu(t)=0 \quad \text{za } \tau>t$$

- Pretpostavimo da su signali u, y, z, h definirani na cijeloj vremenskoj osi $(-\infty, +\infty)$
- Može se pokazati da za operaciju konvolucije vrijedi
  - komutativnost $h*u=u*h$
  - asocijativnost $(h*u)*z=u*(h*z)$
  - distributivnost $h*(u*z)=h*u+h*z$
  - multiplikacija s konstantom $\alpha(h*u)=(\alpha h)*u=h*(\alpha u)$
  - diferenciranje $\mathrm{D}(h*u)=\mathrm{D}h*u=h*\mathrm{D}u$

ukoliko desne strane postoje

Suport konvolucije

- Skup ili područje vremenskih trenutaka za koje je signal različit od 0
- Ako je suport od h u nekom intervalu [a, b], a od u u intervalu [c, b] s tim da se a i c eventualno protežu do $-\infty$, a b i d do $+\infty$, tada je suport konvolucije [a+c, b+d]

Karakteristične funkcije

- Pobuda kao linearna kombinacija signala
- Odziv kao linearna kombinacija signala

$$\sum_{1}^{N} a_i u_i \;\rightarrow\; \sum_{1}^{N} a_i v_i$$

- Ovo osigurava jednostavnu analizu sustava
- Može se još pojednostavniti ako bi se našla takva funkcija za koju bi primjena operatora F bila jednostavna

---

- Npr. jednake funkcije za sastavljanje pobude i odziva
- Funkcije koje mogu služiti u sintezi pobude i odziva sustava danog operatorom F, trebaju zadovoljiti uvjet:

$$u \;\rightarrow\; F(u) = Hu,$$

gdje je H realan ili kompleksan broj tako da se u_i i v_i razlikuju samo za skalni faktor H.

- Kaže se da su to vlastite ili karakteristične funkcije operatora F

- Eksponencijalna funkcija je karakteristična funkcija linearnog stacionarnog sustava što se može pokazati konvolucijom
- Odredimo odziv na eksponencijalu $u = e^{st}$, $s = \sigma + j\omega$

$$y = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau = e^{st}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{st}\right)$$

- Integral u zagradi je konstanta ili je funkcija od s
- Naziva se vlastitom vrijednošću ili funkcijom operatora F. $y = Hu$
- Funkcije u i y su jednake, razlikuju se samo za skalni faktor

---

- Za eksponencijalu kao elementarnu funkciju izlazi

$$u_i = e^{s_i t} \rightarrow y_i = H(s_i)e^{s_i t}$$

odnosno

$$\sum a_i u_i(t) = \sum a_i e^{s_i t} \rightarrow y = \sum a_i H(s_i)e^{s_i t}$$

- Ta svojstva eksponencijala proizlaze iz činjenice da se operator linearnog sustava sastoji od kombinacija derivacija integrala, a te operacije na eksponencijali daju opet eksponencijalu

---

- Slično se može zaključiti da je diskretna eksponencijala ili k-ta potencija od z, vlastiti niz diferencijskog operatora

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} h[i]u[k-i] = \sum_{-\infty}^{+\infty} h[i]z^{k-i} = z^k \sum_{-\infty}^{+\infty} h[i]z^{-i}$$

$$y = z^k H(z), \;\; H(z) = \sum h[i]z^{-i}$$

- Što znači da za linearnu kombinaciju u pobudi dobivamo linearnu kombinaciju u odzivu

$$\sum a_i u_i[k] = \sum a_i z_i^k \rightarrow \sum_{-\infty}^{+\infty} a_i H(z_i)z_i^k$$

Stabilnost sustava

- Linearni vremenski promjenjivi sustav je stabilan ako ima omeđen odziv $|y(t)| \le M_y < \infty$ na bilo koju omeđenu pobudu $|u(t)| \le M_u < \infty$
- Nužan i dovoljan uvjet je apsolutno integrabilan impulsni odziv sustava
- Neka je: $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t,\tau)| d\tau \le N$

$$|y(t)| \le \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t,\tau) u(\tau)| d\tau < \mathrm{M}_u \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t,\tau)| d\tau$$

$$|y(t)| < M_u N$$