Teorija signala

Prof. dr. sc. Hrvoje Babić,
Doc. dr. sc. Damir Seršić
ZESOI - FER

Literatura

- WEB: http://ts.zesoi.fer.hr
- H. Babić: *Signali i sustavi*, Zavodska skripta FER, Zagreb, 1996.
  http://sis.zesoi.fer.hr, 2002.
- F. de Coulon: *Signal Theory and Processing*, Artech House, Dedham, 1986.
- L.E. Franks: *Signal Theory*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1969.
- A. Papoulis: *Signal Analysis*, McGraw-Hill, 1977.

Prvi dio: osnove

- Klase signala i sustava
  - Vremenski kontinuirani i diskretni
- Bezmemorijski sustavi
  - Funkcijski i relacijski blokovi
- Memorijski sustavi
  - Memorijske i predikcijske operacije
  - Model s varijablama stanja
- Odziv linearnih sustava

Signal

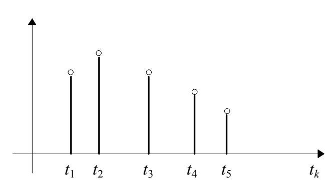
- Signal: fenomen koji nosi neku informaciju.
- Signale - vremenske funkcije označavat ćemo malim slovima - *x, v, u*.
- Trenutna vrijednost: $u(t)$, $t \in \mathbf{R}$.
- Ako je t ograničen na $\mathbf{T} \subset \mathbf{R}$, onda je signal u preslikavanje u: $\mathbf{T} \to \mathbf{U}$, gdje je $\mathbf{T}$ domena, a $\mathbf{U}$ kodomena od u.
  - $u = \{(t, u(t)) \mid t \in \mathbf{T}\}$.

Klasa signala

- Neka je $\mathcal{U}$ skup svih signala iz $\mathbf{T}$ na $\mathbf{U}$.
- Tada je signal u varijabla iz klase signala $\mathcal{U}$.
- Razlikujemo:
  - kodomena od $u(t)$ je $\mathbf{U}$ (skup brojeva) ,
  - kodomena od u je $\mathcal{U}$ (skup funkcija).

Kontinuirani i diskretni signali

- Ako je domena $\mathbf{T}$ neprebrojiv i neprekinut (kontinuiran) skup, onda se radi o vremenski kontinuiranom signalu.
- Ako je domena $\mathbf{T}$ prebrojiv skup trenutaka $\{t_0, t_1, t_2, \dots, t_k\}$, onda je to vremenski diskretan signal.



Diskretna vremenska varijabla

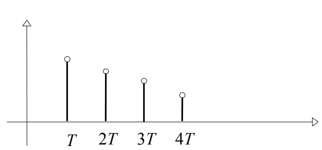
- Trenutke t_k možemo poredati u rastući niz
  $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots$,
- tj. uvesti indeksaciju skupa **T**, $t_k \in \mathbf{T}$.
- Trenutke pridružujemo skupu cijelih brojeva
  $t\colon \mathbf{Z} \to \mathbf{R}$.
- t_k ili $t(k)$ je vrijednost t na cijelom broju $k \in \mathbf{Z}$, gdje je k indeks ili korak niza.
- $t = \{(k, t_k) \mid k \in \mathbf{K}\}; \quad \mathbf{K} \subseteq \mathbf{Z}.$

Diskretna vremenska varijabla...

- Nizove vrem. trenutaka označavamo kao
  $\ldots, t_{-1}, t_0, t_1, t_2, \ldots$ ili
  $\{t(k)\}, k \in \mathbf{Z}$ ili
  $\{t_k\}, \quad k \in \mathbf{Z}$
- Najjednostavniji primjer: aritmetički niz
- $t = \{t_0, t_0+T, t_0+2T, \ldots\}$,
- gdje je T konstanta (kvant vremena).

Jednolika diskretizacija vremena

- $t_k = T\,k \quad k \in \mathbf{Z}.$



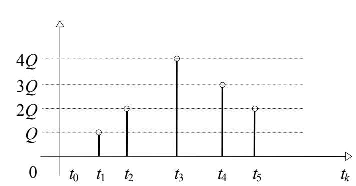
Amplitude signala

- Ako je područje amplituda signala $\mathbf{U} \subset \mathbf{R}$, neprebrojiv i kontinuiran skup, signal je nekvantiziran ili analogan.
- Ako je područje amplituda signala prebrojiv skup $\mathbf{U} = \{\ldots, u_{-2}, u_{-1}, u_0, u_1, u_2, \ldots\}$, signal je kvantiziran.

Diskretizacija amplitude

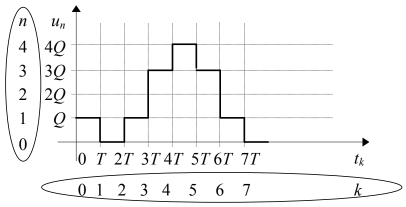
- Indeksacija amplituda u_n je preslikavanje
  $u\colon \mathbf{Z} \to \mathbf{U}$,
- $u = \{u_n \mid n \in \mathbf{N}\}, \mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z}.$
- Najjednostavniji primjer: aritmetički niz
- $u = \{\ldots, a_0-Q, a_0, a_0+Q, a_0+2Q, \ldots\}$,
- gdje je Q konstanta (kvant amplitude).
- $u_n = Q\,n \quad n \in \mathbf{N}.$

Diskretizacija amplitude...



Diskretizacija...

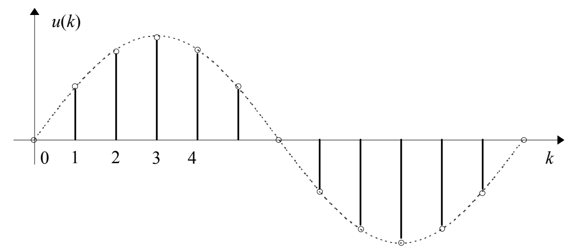
- Jednoliko diskretiziran signal (po vremenu i po amplitudi) može se izraziti samo skupovima indeksa k i n (uz poznate T i Q).
- $u = \{n(k)\},\ k \in \mathbf{K} \subseteq \mathbf{Z},\ n \in \mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z}.$



Osnovni diskretni signali (nizovi)

Sinusni niz

$u(k) = U \cos(\omega T_0 k + \zeta)$, gdje je ω frekvencija dodirnice

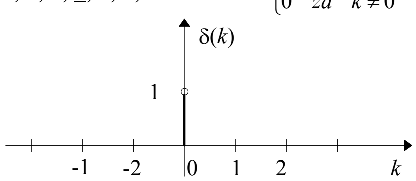


Osnovni diskretni signali (nizovi)

Jedinični niz (Niz s jediničnim članom ili uzorkom, Kroneckerov delta, δ–niz)

δ = ..., 0, 0, 1, 0, 0, ...

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & za \quad k = 0, k \in \mathbb{Z} \\ 0 & za \quad k \neq 0 \end{cases}$$



Osnovni diskretni signali (nizovi)

$u(k) = U \cos(\Omega k + \zeta)$, $k \in Z$

U - amplituda ζ - faza

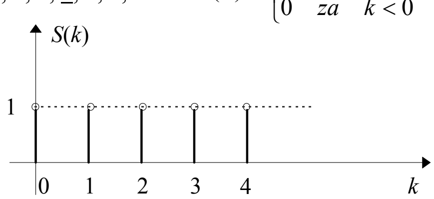
$\Omega = \omega T_0$ - korak argumenta u radianima analogan frekvenciji

Osnovni diskretni signali (nizovi)

Jedinična stepenica (Heavisideov niz)

S = ..., 0, 0, 1, 1, 1, ...

$$S(k) = \begin{cases} 1 & za \quad k \geq 0,\ k \in \mathbb{Z} \\ 0 & za \quad k < 0 \end{cases}$$



Svojstva sinusnog niza

Za $\Omega = 2\pi - \Delta$ izlazi

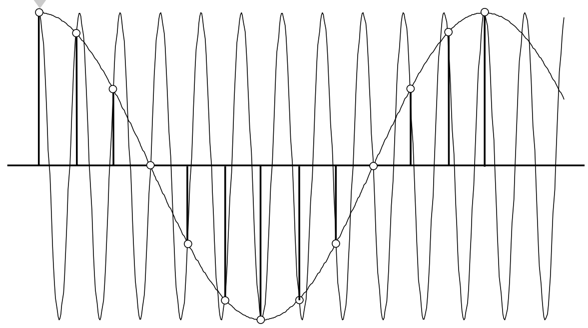
$u(k) = \cos(2\pi - \Delta)k = \cos(-\Delta k) = \cos \Delta k$

Iz raspoloživog niza se ne može razlikovati da li je frekvencija dodirnice

$\Omega_1 = 2\pi - \Delta$ ili $\Omega_2 = \Delta$

$u(k) = \cos(\Omega\, k + \zeta),\quad k \in Z$

$\Omega_1 = \pi / 6 \qquad \Omega_2 = 11\pi / 6$



Svojstva sinusnog niza

Vidi se da se iz ovog niza ne može razlikovati frekvencija Ω_1 od bilo koje

$$\Omega_n = \Omega_1 + 2n\pi\ ,\ n \in Z \text{ jer je}$$

$$\cos[(\Omega_1+2n\pi)k] = \cos(\Omega_1 k + 2nk\pi) = \cos(\Omega_1 k) \qquad n, k \in Z$$

Da bi se Ω mogao odrediti jednoznačno iz niza moramo biti sigurni da je $|\Omega| < \pi$, odnosno $\omega < \pi / T_0$ ili $2f < 1 / T_0$.

Operacije na signalu, sustav

- Promjene na signalu se događaju kad signal prolazi kroz medij ili sustav.
- Sustav je cjelina sastavljena od međusobno povezanih objekata gdje svojstva objekata i njihovo međudjelovanje određuju svojstva i vladanje cjeline.
- Multidisciplinarni problem: odrediti, podesiti, predvidjeti vladanje sustava, ili pak realizirati sustav željenih svojstava.

Operacije na signalu

- Kvantitativna analiza sustava u različitim disciplinama vodi na iste matematičke postupke – teoriju signala i sustava.
- Važne operacije: modificiranje vremenske i amplitudne osi signala.
- Radi jednoznačnosti koristit ćemo funkcije koje imaju inverziju -

  monotono rastuće ili padajuće funkcije.

Transformacija vremenske osi

- Neka funkcija τ preslikava staru os u novu
- τ: $\mathbf{T}_s \rightarrow \mathbf{T}_n$.
- Novu vrijednost signala računamo kao
- $u_n(t) = u_s(\tau^{-1}(t)),\quad t \in \mathbf{T}_n$.
- Primjer (stezanje ili rastezanje signala):

  $\tau(t) = t / a \qquad t \in \mathbf{T}_s$.

  $\tau^{-1}(t) = a\, t \qquad t \in \mathbf{T}_n$.

Transformacija područja

- Neka je $\mathbf{T}$ os signala u_s . Imamo
- u_s: $\mathbf{T} \rightarrow \mathbf{U}_s$, gdje je $\mathbf{U}_s$ područje signala.
- Preslikamo "staro" područje $\mathbf{U}_s$ u novo $\mathbf{U}_n$:
- $\varphi : \mathbf{U}_s \rightarrow \mathbf{U}_n$.
- Dobili smo novi signal u_n :
- $u_n(t) = \varphi(u_s(t)), \qquad t \in \mathbf{T}$.
- Pri tom funkcija φ mora imati inverziju (ako želimo restaurirati stari signal).

Preslikavanje signala

- Jednostavno preslikavanje - kompozicija funkcija:
- $v(t) = f(u(t)), \quad v = f(u), \quad u \in \mathcal{U}, v \in \mathcal{V}.$
- Trenutna vrijednost preslikava se u trenutnu.
- Složenije preslikavanje - operator pridružuje signalu drugi signal:
- $v = \boldsymbol{F}(u), \qquad u \in \mathcal{U}, v \in \mathcal{V}.$

Složeno preslikavanje...

- Neka $\boldsymbol{F}$ preslikava signal u iz intervala $[t_1, t_2]$ u signal v u intervalu $[t_1, t_2]$.

$$v_{[t_1,t_2]} = \boldsymbol{F}\left(u_{[t_1,t_2]}\right)$$

- Trenutna vrijednost $v(t)$, uz $t \in [t_1, t_2]$ zavisi od svih trenutnih vrijednosti $u(\tau)$ iz intervala $\tau \in [t_1, t_2]$!

Složeno preslikavanje...

- Trenutna vrijednost $v(t)$ može se izraziti kao:

$$v(t) = F\left(u_{[t_1,t_2]}, t\right)$$

- gdje je F funkcional koji funkciji u na intervalu $[t_1, t_2]$ pridružuje broj $v(t)$.
- Posebice su zanimljive 2 mogućnosti:
  - $v(t)$ ovisi od segmenta $[t_1, t)$ - prije t, ili
  - $v(t)$ ovisi od segmenta $(t, t_2]$ - poslije t.
- Trenutci t_1, t_2 mogu biti i u beskonačnosti.

Vremenski kontinuirani sustavi

- Primjer funkcionala je blok koji povezuje:

$$\dot{x} \text{ i } x$$

- Integrator:

$$u \longrightarrow \boxed{\int} \longrightarrow y \qquad\qquad y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} u(\tau)d\tau$$

Vremenski kontinuirani sustavi

- Integrator je memorijski element.
- Za određivanje y(t) potrebno je $y(t_0)$ i $u_{(t_0,t]}$.
- y(t) je funkcional od $u_{(t_0,t]}$.
- $y(t_0)$ je stanje integratora i sadrži svu prošlost do t_0.
- Kod integratora izlaz je ujedno i stanje.

Memorijske i predikcijske operacije diskretnog sustava

Pomak niza - jedinični pomak daje iz ulaznog niza, niz pomaknut za jedan korak.

unaprijed (predikcija)

$$u \longrightarrow \boxed{\mathrm{E}} \longrightarrow y$$

$y = \mathrm{E}\, u$ ili $\{y(k)\} = \mathrm{E}\,\{u(k)\}$

$y(k) = (\mathrm{E}u)(k)$

$y(k) = u(k+1) \quad k \geq 0.$

unatrag (kašnjenje i pamćenje)

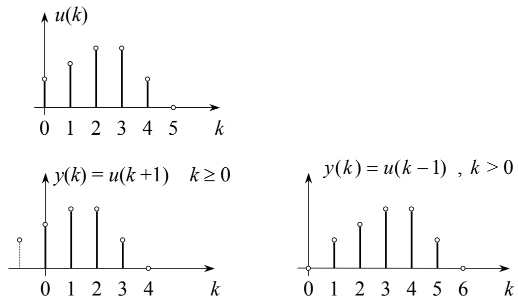
$$u \longrightarrow \boxed{\mathrm{E}^{-1}} \longrightarrow y$$

$y = \mathrm{E}^{-1}u$ ili $\{y(k)\} = \mathrm{E}^{-1}\{u(k)\}$

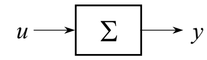
$y(k) = (\mathrm{E}^{-1}u)(k)$

$y(k) = u(k-1) \quad k > 0.$

Operacija pomaka niza unaprijed traži nekauzalan sustav pa je neostvariva.
Zato se u sustavima služimo redovito jedinicama za kašnjenje, odnosno operacijom E^{-1}.



Akumulacija niza



Antidiferencijski operator Δ^{-1} daje niz $\{y(k)\} = \Delta^{-1}\{u(k)\}$ takav da je $\Delta\{y(k)\} = \{u(k)\}$

Može se pokazati da vrijedi $\Delta\left\{\sum_{j=0}^{k-1} u(j) + K\right\} = \{u(k)\}$

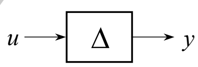
Za slučaj kauzalnih signala $\left(\sum_{j=0}^{k} u(j) + K\right) - \left(\sum_{j=0}^{k-1} u(j) + K\right) = u(k)$

Prema tome

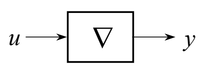
$$\Delta^{-1}\{u(k)\} = \left\{\sum_{j=0}^{k-1} u(j) + K\right\} \qquad y(k) = \begin{cases} y(0)\ , & k = 0 \\ y(0) + \sum_{j=0}^{k-1} u(j)\ , & k > 0 \end{cases}$$

Diferencija niza

uzlazna

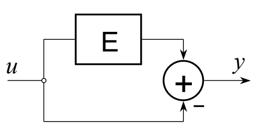


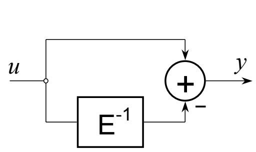
silazna



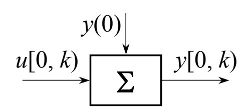
$y = \Delta u$ ili $\{y(k)\} = \Delta\ \{u(k)\}$
$y(k) = (\Delta u)(k) = u(k+1) - u(k)$
$\{y(k)\} = (E - 1)\{u(k)\}$

$y = \nabla u$ ili $\{y(k)\} = \nabla\{u(k)\}$
$y(k) = (\nabla u)(k) = u(k) - u(k-1)$
$\{y(k)\} = (1 - E^{-1})\{u(k)\}$

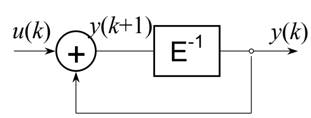




Uzlazni akumulator



$y(k+1) - y(k) = u(k)$
$y(k+1) = u(k) + y(k)$
$y(1) = u(0) + y(0)$ Moramo poznavati $y(0)$
$y(2) = u(1) + y(1) = u(1) + u(0) + y(0)$
$y(k) = \sum_{j=0}^{k-1} u(j) + y(0) \ , \ k > 0$ diskretni analogon integratora



$y(k+1) = y(k) + u(k)$
$y[0, k) = F(y(0), u[0, k))$

Diferencija višeg reda

$$\Delta^n\{u(k)\} = (E-1)^n\{u(k)\} = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} E^{n-r}\{u(k)\}$$

$$\nabla^n\{u(k)\} = (1-E^{-1})^n\{u(k)\} = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} E^{-r}\{u(k)\}$$

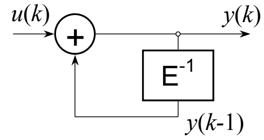
$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Silazni akumulator

Silazni antidiferencijski operator ∇^{-1} daje niz $\{y(k)\} = \nabla^{-1}\{u(k)\}$ takav da je $\nabla\{y(k)\} = \{u(k)\}$

$$\nabla^{-1}\{u(k)\} = \left\{\sum_{j=0}^{k} u(j) + K\right\}$$

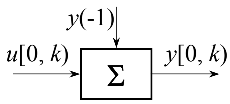
$$y(k) = y(-1) + \sum_{j=0}^{k-1} u(j)\ , \quad k \geq 0$$



$y(k) = y(k-1) + u(k)$
$y[0, k) = F(y(-1), u[0, k))$

$y(k) - y(k\text{-}1) = u(k)$
$y(k) = u(k) + y(k\text{-}1)$
$y(0) = u(0) + y(\text{-}1)$ Moramo poznavati $y(\text{-}1)$
$y(1) = u(1) + u(0) + y(\text{-}1)$
$y(2) = u(2) + u(1) + u(0) + y(\text{-}1)$

$$y(k) = \sum_{j=0}^{k-1} u(j) + y(-1)$$



Veza s kontinuiranim sustavom u slučaju da se derivacija aproksimira s diferencijom

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u}) \cong \frac{\mathbf{x}(k+1)-\mathbf{x}(k)}{T} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k),\mathbf{u}(k))$$

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(k) + T\mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k))$$

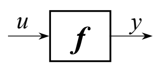
linearni sustav

$$\frac{\mathbf{x}(k+1)-\mathbf{x}(k)}{T} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{x}(k+1) = (\mathbf{I}+T\mathbf{A})\mathbf{x}(k) + T\mathbf{B}\mathbf{u}(k)$$
$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_d\mathbf{x}(k) + T\mathbf{B}\mathbf{u}(k)$$

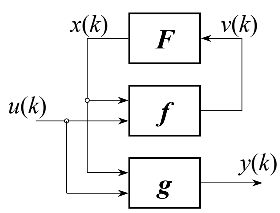
Model vrem. diskretnog sustava

Bezmemorijski sustav



$y(k) = f[u(k)]$

Memorijski sustav $y(k) = F(x(k_0), u(k_0, k])$ za $k > k_0$



Bezmemorijski dio:
$v(k) = f(x(k), u(k))$
$y(k) = g(x(k), u(k))$

Memorijski dio:
$x(k) = F(x(k_0), v(k_0, k])$

Operacije među signalima

- Djelovanje više signala na jedan rezultirajući može se opisati funkcijom: $v(t) = f(u_1(t), u_2(t), u_3(t),...)$.
- Općenito, to je nelinearna funkcija, npr.

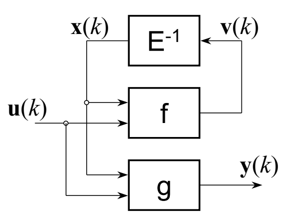
$$v(t) = [u_1(t)]^{u_2(t)},$$

- ili linearna, npr.

$$v(t) = \alpha u_1(t) + \beta u_2(t).$$

Posebno važan memorijski element u memorijskom podsustavu je element jediničnog kašnjenja.

$\mathbf{u}(k)$, $\mathbf{x}(k)$, $\mathbf{y}(k)$ - vektori sustava



jednadžbe sustava

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k))$$
$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k))$$

Operacije među signalima

- Elementarne operacije - ne mogu se dalje razlagati.
- Važne elementarne operacije:
  - zbrajanje $v = u_1 + u_2$
  - množenje $v = u_1 u_2$
- Razlaganje f na elementarne operacije - Taylorov red s konačnim brojem članova.
- Funkcionali: linearni ili nelinearni.

Osnovne operacije na nizovima i elementi diskretnog sustava

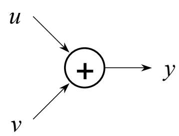
Zbrajanje nizova

Zbroj dva niza $y = u + v$ ili

$\{y(k)\} = \{u(k)\} + \{v(k)\}$

je niz s općim članom

$y(k) = u(k) + v(k)$ za svaki $k \in$ Z.



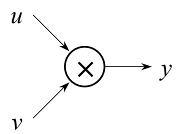
Produkt nizova

Produkt dva niza $y = u\,v$ ili

$\{y(k)\} = \{u(k)\}\ \{v(k)\}$

je niz s općim članom

$y(k) = u(k) \cdot v(k)$ za svaki $k \in$ Z.



Spajanje sustava

- Sustav s više ulaza i izlaza može se jednostavno razložiti na više sustava s više ulaza, ali samo s po jednim izlazom.
- Dva i više objekata ili podsustava mogu se spojiti tako da zajedno čine jedan složeni sustav.
- Sustavi od kojih je sastavljen složeni sustav zovu se podsustavi.

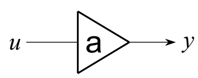
Osnovne operacije na nizovima i elementi diskretnog sustava

Množenje s konstantom

$y = a\,u$ ili

$\{y(k)\} = a\{u(k)\} = \{a\,u(k)\}$

$y(k) = a\,u(k)$ za svaki $k \in$ Z.

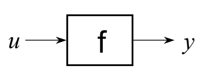


Funkcijski blok

$y = f(u)$ ili

$\{y(k)\} = f[\{u(k)\}]$

$y(k) = f[u(k)]$ za svaki $k \in$ Z.



Pravila spajanja

- Izlazi iz blokova se ne spajaju međusobno.
- Svaki ulaz bloka spaja se na izlaz nekog bloka ili je ulaz u spojeni složeni sustav. Svi ulazi podsustava su angažirani.
- Izlaz bloka može biti izlaz složenog sustava. Najmanje jedan izlaz podsustava je izlaz spojenog sustava.

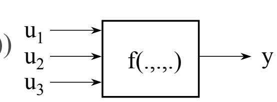
Klasifikacija sustava

- Bezmemorijski ili trenutni
  $y(t) = f(t, u(t))$,
- memorijski ili kauzalni
  $y(t) = F(t, u_{(-\infty,\, t]})$,
- prediktivni (anticipativni) ili antikauzalni
  $y(t) = F(t, u_{[t,\, \infty)})$,
- memorijsko-prediktivni ili nekauzalni
  $y(t) = F(t, u_{(-\infty,\infty)})$.
- Nekauzalni sustavi često se dobivaju pri sintezi sustava, uslijed idealiziranih zahtjeva.

Kontinuirani sustavi bez memorije

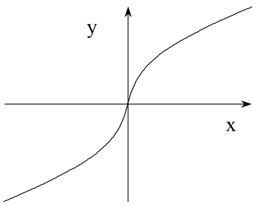
- Izlaz u trenutku *t* ovisi samo o vrijednosti ulaznog signala u trenutku *t*
- Elementi sustava prikazani funkcijskim blokom
- Funkcijski blok opisan funkcijom

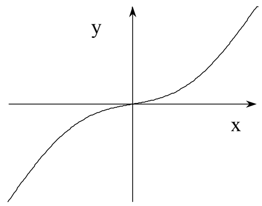
$$y(t) = f(u_1(t), u_2(t), \ldots, u_m(t))$$
$$y(t), u_i(t) \in R$$



Funkcijski blok s jednim ulazom i jednim izlazom

- Monotone funkcije imaju inverziju



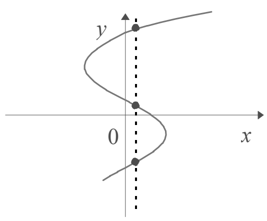


Eksplicitni i implicitni sustavi

- Dvije grupe sustava bez memorije
  - eksplicitni sustavi
  - implicitni sustavi
- Podjela prema tome da li signal na svom putu kroz sustav ne čini petlju
- Eksplicitni sustav - nema petlje, spojna lista sustava može se sortirati.
- Implicitni sustav - ima jednu ili više petlji, spojna lista sustava se ne može sortirati.

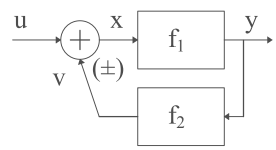
Relacijski blok

- Relacija - za jednu apcisu imamo više vrijednosti ordinata



Primjer implicitnog sustava

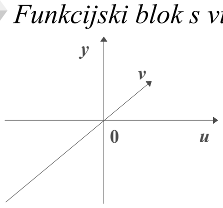
Sustav s pozitivnom ili negativnom povratnom vezom:

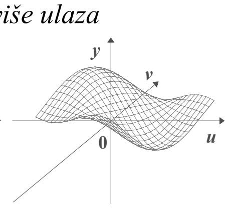


$$u = x \mp v = f_1^{-1}(y) \mp f_2(y)$$

$$y = f(u); \quad f = (f_1^{-1} \mp f_2)^{-1}$$

Funkcijski blok s više ulaza

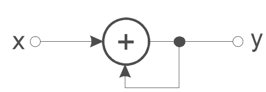




- *u*, *v* - ulazne varijable
- *y* - izlazna varijabla
- Skup krivulja *y=f(u,v)*, uz parametar *v*

Implicitni sustavi

- Implicitni sustavi mogu biti i relacijski
- Rješenje ne mora postojati
- Primjer: zbrajalo s povratnom vezom



- x=0 , y=0
- x≠0, nema rješenja

$$y = x + y$$

Linearnost sustava

- Definicija:
  - Sustav s ulazom **x** i izlazom *y* je linearan ako zadovoljava uvjet

$$f(a\cdot \mathbf{x}_1 + b\cdot \mathbf{x}_2) = a\cdot f(\mathbf{x}_1) + b\cdot f(\mathbf{x}_2)$$

za sve realne vrijednosti a, b, $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, gdje su $\mathbf{x}_1$ i $\mathbf{x}_2$ bilo koje dvije vrijednosti vektora ulaza.

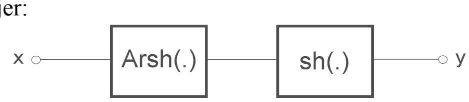
Linearnost sustava ...

- Sustav s m ulaza i n izlaza

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{1n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}, \ \mathbf{y} = \mathbf{Ax}$$

Linearnost sustava ...

- Složeni sustav koji zadovoljava uvjet linearnosti ne mora nužno biti sastavljen od elemenata koji su linearni.
- Primjer:



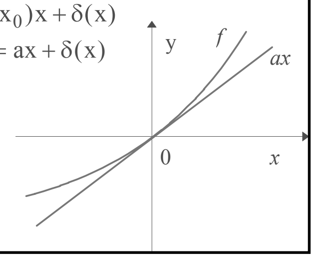
- Elementi sustava su nelinearni, a sustav je linearan:
  - sustav nije strukturno linearan.
- Svaki sustav koji je strukturno linearan (svi elementi linearni) linearan je i operacijski.

Aproksimacija nelinearnog sustava linearnim

- Razvoj nelinearne funkcije f(x) u Taylorov red u okolini točke x_0

$$f(x_0 + x) = f(x_0) + f'(x_0)x + \delta(x)$$
$$y = f(x_0 + x) - f(x_0) = ax + \delta(x)$$

- ax - linearni član
- δ(x) - odstupanje od linearnosti



Linearnost sustava ...

- Linearni sustav s n ulaza karakterizira se ulazno izlaznom relacijom:

$$y = \sum_{1}^{n} a_i x_i = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

- Linearni sustav s n ulaza može se se promatrati kao suma n identičnih sustava (superpozicija) $y = f(x_1,x_2,x_3) = f(x_1,0,0) + f(0,x_2,0) + f(0,0,x_3)$

Linearizacija funkcijskog bloka s više ulaza i izlaza

- Taylorov razvoj za sve izlaze kao funkcije više varijabli

$$y_i = f_i(u_1, u_2, \ldots, u_m), \qquad i = 1,2,\ldots,n.$$

razvoj daje

$$y_i = f_i(u_{10}, u_{20}, \ldots, u_{m0}) + \frac{\partial f_i}{\partial u_1}\Delta u_1 + \frac{\partial f_i}{\partial u_2}\Delta u_2 + \ldots$$

$$+ \frac{\partial f_i}{\partial u_m}\Delta u_m \quad + \text{članovi višeg reda}$$

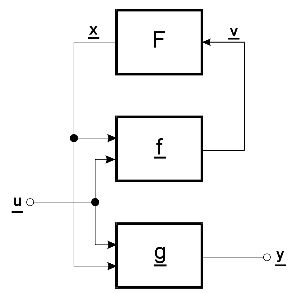
Linearizacija funkcijskog bloka s više ulaza i izlaza ...

- Napisano pomoću Jacobijeve matrice

$$\Delta \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \\ \vdots \\ \Delta y_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & & \frac{\partial f_2}{\partial u_m} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial f_r}{\partial u_1} & \cdots & & \frac{\partial f_r}{\partial u_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \\ \vdots \\ \Delta u_m \end{bmatrix} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u}$$

- U okolini točke y_0 vrijedi $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$

Model s varijablama stanja



- bezmemorijski dio, f i g
  v(t)=**f**(**x**(t), **u**(t), t)
  y(t)=**g**(**x**(t), **u**(t), t)
- memorijski dio, F, je ovdje integrator

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{v}(\tau)d\tau$$

Model s varijablama stanja

- Sustav je n-tog reda ako treba n varijabli stanja za potpun opis njegovog vladanja.
- Pretpostavimo sustav s više varijabli ulaza, izlaza i stanja:
  $\mathbf{u}=[u_1, u_2 ,..., u_m]^t$ $\quad \mathbf{u}(t)\in R^m$
  $\mathbf{y}=[y_1, y_2 ,..., y_r]^t$ $\quad \mathbf{y}(t)\in R^r$
  $\mathbf{x}=[x_1, x_2 ,..., x_n]^t$ $\quad \mathbf{x}(t)\in R^n$
- Stanje u trenutku t se može izraziti s:

$$\mathbf{x}(t) = \varphi(t, t_0, \mathbf{x}(t_0), \mathbf{u}(t_0, t))$$

φ je (jednoznačna) vektorska funkcija.

Model linearnog kontinuiranog sustava

- Sustav je linearan ako je funkcija **v**=**f**(**x**,**u**,t) linearna, tj.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)$$

- Ako su A i B konstantne, sustav je linearan i vremenski nepromjenjiv

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax}(t) + \mathbf{Bu}(t)$$

Model s varijablama stanja

- Izlaz ovisi o stanju i pobudi:
  y(t)=**g**(**x**(t), **u**(t), t)
  y(t)=**g**(t, t_0, **x**(t_0), **u**(t_0,t])
- Vremenski kontinuiran sustav s varijablama stanja možemo rastaviti na dva podsustava:
  - memorijski,
  - bezmemorijski.

Model linearnog kontinuiranog sustava

- Nepobuđen linearan sustav (tj. u(t)=0, za sve t) ima homogenu diferencijalnu jednadžbu
  - vremenski promjenjiv sustav:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)$$

  - vremenski stalan sustav:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{Ax}(t)$$

Signali i sustavi

Opći linearni sustavi

Diracova δ - funkcija

- Diracova $\delta -$ funkcija

$$\delta(t) = 0, \quad t \neq 0; \qquad \text{i} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1.$$

- $\delta(t)$ – singularna funkcija.
- Regularne + singularne funkcije = poopćene funkcije ili distribucije.

$$\delta(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\varphi(t)\; dt = \varphi(0).$$

Delta distribucija

Singularna delta funkcija

Ispitna funkcija, regularna u nuli

Skalar

Primjeri kontinuiranih signala

- Za analizu linearnih sustava najveće značenje imaju:
  - kompleksna eksponencijala,
  - Diracova $\delta -$ funkcija.

Impulsni odziv i konvolucija

- Diracovu funkciju nazivamo i jedinični impuls.
- Poznavanje impulsnog odziva nekog sustava je dovoljno za potpun opis njegovog vladanja.
- Odziv linearnog vremenski stalnog sustava na opću pobudu opisuje se konvolucijskim integralom:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)u(\tau)\; d\tau,$$

gdje je $h(t)$ odziv sustava na jedinični impuls.

Kompleksna eksponencijala

- $u(t) = \mathrm{U}e^{st}$; $s,\mathrm{U} \in \mathbf{C}$.
- Ovisno o kompleksnoj frekvenciji $s = \sigma + j\omega$ imamo slučajeve:
  - konstantnog ($s = 0$),
  - eksponencijalnog ($\omega = 0$)
  - harmonijskog signala ($\sigma = 0$).
- Pobuda kompleksnom eksponencijalom koristi se za analizu vladanja sustava u frekvencijskoj domeni.

Linearne operacije na signalima

- Složeni signali se mogu predstaviti linearnom kombinacijom elementarnih signala:

$$u(t) = \sum_{k=1}^{N} \mathrm{a}_k \; u_k(t),$$

- gdje su a_k – realne ili kompleksne konstante, a $\{u_k(t)\}$ prebrojiv skup elementarnih funkcija.
- Složeni se signali mogu predstaviti također i neprebrojivim skupom elementarnih funkcija:

$$v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\lambda)\, u(t,\lambda)\, d\lambda, \qquad \lambda - \text{kontinuiran.}$$

Linearne operacije na signalima

- *Fourierov* red predstavlja primjer linearne kombinacije eksponencijala, čije frekvencije su aritmetički niz:

$$u(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\mathrm{a}_k\, e^{jk\omega_0 t}.$$

- Primjer neprebrojivog skupa je *Fourierov* integral:

$$v(t)=\int_{-\infty}^{\infty}a(\lambda)\, e^{j\lambda t}\, d\lambda.$$

Harmonijska pobuda sustava

- Veličina $H(\omega)$ je kompleksan broj koji nam pokazuje za svaku frekvenciju ω:
  - koliko se promijenila amplituda harmonijskog odziva
  - kakav je fazni pomak u odnosu na harmonijsku pobudu $u(t)$.
- $A(\omega) = |H(\omega)|$ je frekv. karakteristika amplitude,
- $\varphi(\omega) = \arg H(\omega)$ je frekv. karakteristika faze.
- Izraz za $H(\omega)$ predstavlja *Fourierov* integral ili *Fourierov* spektar impulsnog odziva sustava $h(t)$.

Primjer

- Predstavimo signal integralom delta funkcija

$$u(t)=\int_{-\infty}^{\infty}a(\lambda)\,\delta(t-\lambda)\,d\lambda,\quad a(\lambda)=u(\lambda).$$

- Djelovanje nekog stalnog linearnog sustava na signal u možemo opisati linear. operatorom F:

$$F[u(t)]=F\left[\int_{-\infty}^{\infty}u(\lambda)\,\delta(t-\lambda)\,d\lambda\right]=\int_{-\infty}^{\infty}u(\lambda)\,F[\delta(t-\lambda)]\,d\lambda,$$

$$F[u]=y,\quad F[\delta]=h,$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}u(\lambda)\,h(t-\lambda)\,d\lambda \longrightarrow \text{konvolucijski integral !}$$

Pobuda sustava kompleksnom eksponencijalom

- Općenito, pobuda kompleksnom eksponencijalom opet daje kompleksnu eksponencijalu:

$$u(t)=\mathrm{U}e^{st}\quad\rightarrow\quad y(t)=H(s)\mathrm{U}e^{st},$$

$$H(s)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\vartheta)\,e^{-s\vartheta}d\vartheta.$$

- To nam kazuje da je kompleksna ksponencijala svojstvena funkcija (*eigenfunction*) konvolucije!

Harmonijska pobuda sustava

- Korisna za analizu linearnog nepromjenjivog sustava u frekvencijskoj domeni:

$$u(t)=\mathrm{U}e^{j\omega t}\quad\rightarrow\quad y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t-\tau)\,\mathrm{U}e^{j\omega\tau}d\tau.$$

- Nakon supstitucije $t-\tau=\vartheta$ i sređivanja izlazi:

$$y(t)=H(\omega)\,\mathrm{U}e^{j\omega t},\quad H(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\vartheta)\,e^{-j\omega\vartheta}d\vartheta.$$

- Harmonijska pobuda daje harmonijski odziv – nema izobličenja ni viših harmonika.

Pobuda sustava kompleksnom eksponencijalom

- Izraz za $H(s)$ je ujedno izraz za dvostranu *Laplaceovu* transformaciju impulsnog odziva h.

$$H(s)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\vartheta)\,e^{-s\vartheta}d\vartheta.$$

- Izraz za jednostranu *Laplaceovu* transformaciju dobivamo uz kauzalnu pobudu $u(t) = \mathrm{U}e^{st}\cdot\mu(t)$!!!