Spektralne karakteristike slučajnih procesa

Prof. dr. sc. Hrvoje Babić
Doc. dr. sc. Damir Seršić

Spektar snage signala

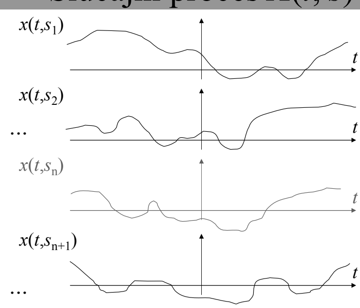
- Fourierova transformacija: $x(t)$ o–> $X(\omega)$.

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,e^{-j\omega t}\,dt \qquad x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\,e^{j\omega t}\,dt$$

- Dovoljan uvjet konvergencije – apsolutna integrabilnost $x(t)$:

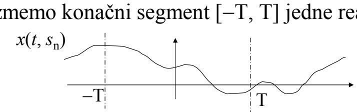
$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\,dt < \infty$$

Slučajni proces $\boldsymbol{X}(t, s)$



Spektar snage signala

- Realizacija beskonačnog trajanja: integral divergira.
- Uzmemo konačni segment [–T, T] jedne realizacije:



$$x_T(t,s_n)=\begin{cases} x(t,s_n) & -T<t<T \\ 0 & drugdje \end{cases}$$

- T – konačan => integral konvergira.
- Fourierov spektar: $$X_T(\omega)=\int_{-T}^{T} x(t)\,e^{-j\omega t}\,dt$$

Energija i snaga signala

- Energija u intervalu 2T:

$$\mathcal{E}(T)=\int_{-T}^{T} x^2(t)\,dt.$$

- Snaga: $$P(T)=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x^2(t)\,dt$$

= energija u jedinici vremena.

Gustoća spektra snage signala

- Parsevalov teorem za energije:

$$\mathcal{E}(T)=\int_{-\infty}^{\infty} x_T^2(t)\,dt \quad = \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X_T(\omega)|^2\,d\omega.$$

- Snaga = energija / vrijeme:

$$P(T)=\frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty} x_T^2(t)\,dt \quad = \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{|X_T(\omega)|^2}{2T}}_{\text{gustoca sp. snage}}\,d\omega.$$

- Veći T => točniji izraz za snagu jedne realizacije $x(t, s_n)$ slučajnog procesa $\boldsymbol{X}(t, s)$.

Gustoća spektra snage

- Do sada: jedna realizacija $x(t, s_n)$ iz sloga $\boldsymbol{X}(t, s)$.
- $P(T)$ je različit za različite slučajne varijable s_n.
- Neka je:

$$P_n = \lim_{T\to\infty} P_n(T), \qquad P_{XX} = E[P_n]$$

- slijedi:

$$P_{XX} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} E\left[X_T^2(t)\right] dt.$$

= srednja snaga slučajnog procesa $\boldsymbol{X}(t)$.

Gustoća spektra snage

- Parsevalov teorem:

$$P_{XX} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{E[\,|X_T(\omega)|^2\,]}{2T} d\omega.$$

- Srednja snaga procesa $\boldsymbol{X}(t)$ je dana vremenskom srednjom vrijednošću $A\{\cdot\}$ drugog momenta:

$$P_{XX} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} E\left[X^2(t)\right] dt = A\left\{ E\left[X^2(t)\right]\right\}.$$

Gustoća spektra snage

- Za stacionarni proces:

$$P_{XX} = E[\,X^2(t)] = \overline{X^2} = konst.$$

- Nadalje, srednja snaga procesa može se izračunati i integracijom gustoće spektra snage:

$$P_{XX} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega)\, d\omega,$$

$$S_{XX}(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{E[\,|X_T(\omega)|^2\,]}{2T}.$$

Svojstva gustoće spektra snage

1.) $S_{xx}(\omega) \geq 0$,

2.) $S_{xx}(-\omega) = S_{xx}(\omega)$,

3.) $S_{xx}(\omega)$ – realan.

- Standardna devijacija spektra snage
  => efektivna širina pojasa.

$$\Omega^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2\, S_{XX}(\omega)\, d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega)\, d\omega}.$$

Autokorelacija - spektar snage

$$S_{XX}(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{E[\,X_T^*(\omega)\cdot X_T(\omega)]}{2T}$$

$$= \lim_{T\to\infty} E\Big[\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} X(t_1)\, e^{j\omega t_1} dt_1 \cdot \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} X(t_2)\, e^{-j\omega t_2} dt_2\,\Big]$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} \underbrace{E[\,X(t_1)\, X(t_2)]}_{R_{XX}(t_1,t_2)}\, e^{-j\omega(t_2-t_1)} dt_2 dt_1$$

- $R_{XX}(t_1, t_2)$ – autokorelacijska funkcija procesa $X(t)$.

Autokorelacija - spektar snage

- Uz $t = t_1$ i $\tau = t_2 - t_1$ izlazi:

$$S_{XX}(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T-t}^{T-t} \int_{-T}^{T} R_{XX}(t, t+\tau)\, dt\; e^{-j\omega\tau} d\tau$$

- Vanjski integral ne ovisi o T, već samo o τ :

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left\{ \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} R_{XX}(t, t+\tau)\, dt \right\}} e^{-j\omega\tau} d\tau$$

vremenska srednja vrijednost autokorelacijske funkcije procesa $\boldsymbol{X}(t)$.

Autokorelacija - spektar snage

$$S_{XX}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} A[\,R_{XX}(t,t+\tau)]e^{-j\omega\tau}d\tau$$

- $S_{xx}(\omega)$ i $A[R_{xx}(t,\ t+\tau)]$ su Fourierov transformacijski par:

  $S_{XX}(\omega)$ <–o $A[R_{XX}(t,\ t+\tau)]$
- Za $\boldsymbol{X}(t)$ stacionaran u širem smislu vrijedi:

  $A[R_{XX}(t,\ t+\tau)] = R_{XX}(\tau)$
- => AKF nije funkcija vremena, već samo pomaka τ.

Wiener-Khinchinove relacije

$$S_{XX}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$R_{XX}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega$$

- Veza autokorelacijske funkcije i spektra snage stacionarnog slučajnog procesa.

Wiener-Khinchinove relacije