Osnove slučajnih procesa

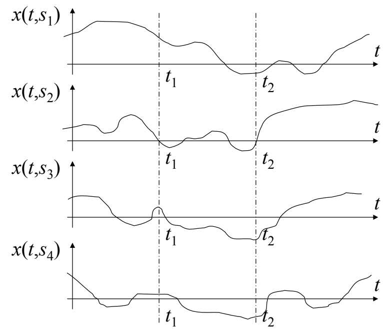
Prof. dr. sc. Sven Lončarić

Prof. dr. sc. Hrvoje Babić

Doc. dr. sc. Damir Seršić

Koncept slučajnog procesa

- Za $t = t_1$ $X(t_1,s)$ je slučajna varijabla



Funkcije distribucije slučajnog procesa

- U određenom trenutku t, $\mathbf{X}(t)$ je slučajna varijabla koja ima funkciju distribucije prvog reda definiranu izrazom:

$$F_X(x,t) = P(\mathbf{X}(t) \le x)$$

- To je funkcija distribucije prvog reda.
- Za N slučajnih varijabli imamo funkciju distribucije N-tog reda:

$$F_X(x_1,\ldots,x_N,t_1,\ldots,t_N) =$$
$$= P(\mathbf{X}(t_1) \le x_1,\ldots,\mathbf{X}(t_N) \le x_N)$$

Definicija stacionarnosti

- Definicija: stohastički proces $\mathbf{X}(t)$ je stacionaran ako za svaki $n \in \boldsymbol{N}$, za svaki izbor trenutaka $t_1, \ldots, t_n$ i za svaki $u \in \boldsymbol{R}$ slučajne varijable $\mathbf{X}(t_1), \ldots, \mathbf{X}(t_n)$ i slučajne varijable $\mathbf{X}(t_1+u), \ldots, \mathbf{X}(t_n+u)$ imaju jednake funkcije distribucije n-tog reda.
- Definicija: slučajni proces koji nije stacionaran zove se nestacionaran slučajni proces.

Korelacija slučajnih varijabli

- Promatrajmo korelaciju dvaju slučajnih varijabli $\mathbf{X}_1=\mathbf{X}(t_1)$ i $\mathbf{X}_2=\mathbf{X}(t_2)$ definiranu izrazom

$$E[\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2] = E[\mathbf{X}(t_1)\mathbf{X}(t_2)]$$

- Vidi se da ova korelacija općenito ovisi o trenucima t_1 i t_2.

Autokorelacijska funkcija slučajnog procesa

- Definicija: autokorelacijska funkcija slučajnog procesa $\mathbf{X}(t)$ definirana je izrazom:

$$R_{XX}(t_1,t_2) = E[\mathbf{X}(t_1)\mathbf{X}(t_2)]$$

- Dakle autokorelacijska funkcija jednaka je jednostavnoj korelaciji dviju susjednih slučajnih varijabli.

Autokorelacijska funkcija slučajnog procesa

- Budući da korelacija dviju slučajnih varijabli ovisi o funkciji gustoće drugog reda, slijedi da autokorelacijska funkcija stacionarnog procesa drugog reda ovisi samo o razlici $\tau = t_2 - t_1$.

$$R_{XX}(t_1, t_1+\tau) = E[\mathbf{X}(t_1)\mathbf{X}(t_1+\tau)] = R_{XX}(\tau)$$

Stacionarnost u širem smislu

- Mnogi praktični inženjerski problemi traže analizu autokorelacijske funkcije i srednje vrijednosti slučajnog procesa.
- Rješenja tih problema su jednostavnija kada ove veličine ne ovise o apsolutnom vremenu.
- Naravno, ako je proces stacionaran drugog reda autokorelacijska funkcija i srednja vrijednost ne ovise o vremenu, no to je prestrog uvjet koji se često ne da provjeriti u praksi.

Stacionarnost u širem smislu

- Zato se uvodi pojam stacionarnosti u širem smislu.
- Definicija: proces je stacionaran u širem smislu ako vrijedi:

$$E[\mathbf{X}(t)] = \text{konst}$$

$$E[\mathbf{X}(t)\mathbf{X}(t+\tau)] = R_{XX}(\tau)$$

  Proces koji je stacionaran drugog reda je stacionaran i u širem smislu.
- Obrat ne vrijedi.

Vremensko usrednjavanje

- Definicija: vremensko usrednjavanje (ili prosjek) neke veličine definiran je kao:

$$A[.] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} [.]dt$$

- Notacija A je analogna notaciji E za statistički prosjek.
- A je vremenski prosjek (engl. *time-average*).

Vremenska srednja vrijednost i autokorelacija

- Vremenska srednja vrijednost definirana je izrazom:

$$\overline{x} = A[x(t)] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)dt$$

- Vremenska autokorelacijska funkcija definirana je izrazom:

$$\mathscr{R}_{xx}(\tau) = A[x(t)x(t+\tau)] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)x(t+\tau)dt$$

Ergodičnost

- Definicija: slučajni proces je ergodičan ako je vremensko usrednjavanje jednako statističkom usrednjavanju.
- U praksi često možemo pretpostaviti da je proces ergodičan, a nekad nemamo drugog izbora (imamo samo jednu realizaciju).

Svojstva autokorelacijske funkcije

- Za procese koji su stacionarni u širem smislu

$$R_{XX}(\tau) = E[\mathbf{X}(t)\mathbf{X}(t+\tau)]$$

- Tada vrijedi

$$|R_{XX}(\tau)| \le R_{XX}(0)$$
$$R_{XX}(-\tau) = R_{XX}(\tau)$$
$$R_{XX}(0) = E[\mathbf{X}^2(t)]$$

Kroskorelacijska funkcija

- Definicija: kroskorelacijska funkcija dvaju slučajnih procesa **X**(t) i **Y**(t) definirana je kao

$$R_{XY}(t, t+\tau) = E[\mathbf{X}(t)\mathbf{Y}(t+\tau)]$$

- Ako su **X**(t) i **Y**(t) zajednički stacionarni u širem smislu onda je

$$R_{XY}(\tau) = E[\mathbf{X}(t)\mathbf{Y}(t+\tau)]$$

Svojstva kroskorelacijskih funkcija

- Kroskorelacijske funkcije imaju slijedeća svojstva

$$R_{XY}(-\tau) = R_{YX}(\tau)$$
$$|R_{XY}(\tau)| \le \sqrt{R_{XX}(0)R_{YY}(0)}$$
$$|R_{XY}(\tau)| \le \frac{1}{2}[R_{XX}(0) + R_{YY}(0)]$$