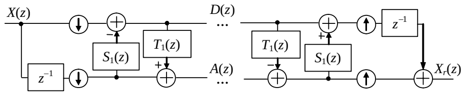
Teorija signala: adaptivni wavelet filtarski slogovi

Prof. dr. sc. Damir Seršić
http://ts.zesoi.fer.hr

Ljestvičasta realizacija PR filtarskog sloga s dva pojasa

- Krećemo od polifazne dekompozicije signala: razložimo signal na parne i neparne uzorke.
- Filtre postavljamo kao prečke na ljestvama ("lifting steps").
- Alterniramo postupak u oba smjera i postižemo željena svojstva filtarskog sloga.



2

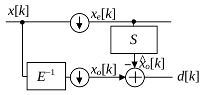
Ljestvičasta struktura

- Svaki PR filtarski slog se može realizirati ljestvičasto (Daubechies, Sweldens 1998: euklidski algoritam za faktorizaciju u "lifting steps").
- Prednosti ljestvičaste realizacije:
  - struktura jamči potpunu rekonstrukciju, čak i ako su filtri nelinearni i vremenski promjenjivi,
  - broj operacija značajno smanjen,
  - kaskada omogućuje izvršavanje operacija na istom memorijskom prostoru.

3

Konstrukcija biortogonalnih filtarskih slogova interpolacijom

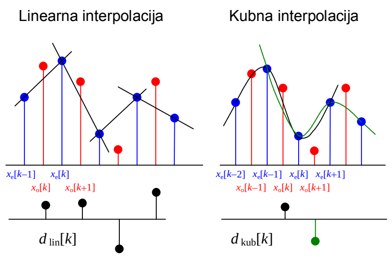
- Neka je prvi korak podizanja S prediktor kojim iz zadanog broja susjednih parnih uzoraka pokušavamo predvidjeti neparni uzorak.



- Korak podizanja S interpolacijski prediktor: $\hat{x}_o[k]$ predviđanje, $d[k]$ greška predikcije. E^{-1} operator jediničnog kašnjenja.

4

Konstrukcija biortogonalnih filtarskih slogova interpolacijom



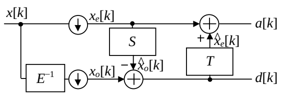
5

Konstrukcija biortogonalnih filtarskih slogova interpolacijom

- U prvom slučaju vrijedi trapezna interpolacijska formula:
  $\hat{x}_o[k]=1/2\cdot(x_e[k-1]+x_e[k])$ i
  $d_{\text{lin}}[k] = x_o[k]-1/2\cdot(x_e[k-1]+x_e[k])$,
- U drugom imamo kubnu interpolaciju:
  $d_{\text{kub}}[k]= x_o[k]-1/16\cdot$
  $(-x_e[k-2]+9\cdot x_e[k-1]+9\cdot x_e[k] -x_e[k+1])$.

6

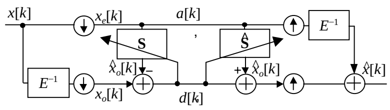
Drugi korak podizanja interpolacijskog sloga



- Čest (i dobar) izbor T = ½ S .
- Ovakva realizacija omogućuje jednostavnu konstrukciju rekonstrukcijske strane sloga običnom zamjenom predznaka.
- Nadalje, interpretacija *d*[*k*] kao pogreške interpolacije polinomom jasno objašnjava svojstvo poništavanja polinoma.

7

Adaptivno razlaganje signala nalik na DWT



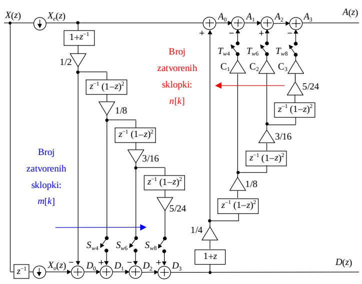
- Filtarski slog s potpunom rekonstrukcijom uz promjenjive parametre prediktora *S*.
- Primjeri kriterija prilagodbe. Traži se minimum ε na intervalu [k-M_1, k+M_2], gdje je:

$$\varepsilon[k]=\sum_{n=k-M_1}^{k+M_2} w[n]\cdot\left|\hat{x}_o[n]-x_o[n]\right|^m \qquad \varepsilon[k]=E\{\left|\hat{x}_o[n]-x_o[n]\right|^m\}$$

$$\varepsilon[k]=\sum_{n=k-M_1}^{k+M_2}\left|d[n]\right|^2\log\frac{1}{\left|d[n]\right|^2}$$

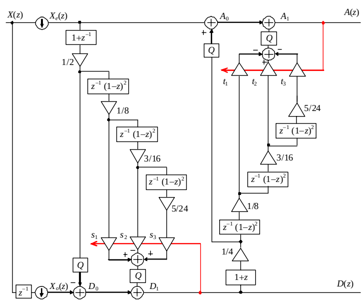
8

PR slog s promjenjivim redom interpolacijskih polinoma



9

Adaptivni PR slog s preslikavanjem cijelih na cijele brojeve



10

- U svim navedenim adaptivnim primjerima, potpuna rekonstrukcija ostvaruje se identičnim "ljestvicama" i promjenom predznaka.
- To su bili jednostavni primjeri pojasnih dekompozicija signala, nalik wavelet filtarskom slogu, koje su prilagođene lokalnim svojstvima signala.

11

Interpolacija signala

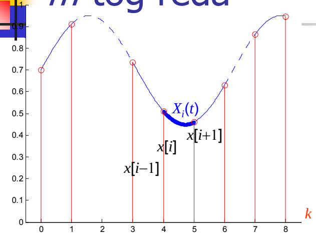
Prof. dr. sc. Damir Seršić
http://ts.zesoi.fer.hr

Interpolacija polinomom *m*-tog reda

- Za crtanje krivulja često se koristi savitljivi krivuljar (*eng. spline*).
- Krivuljar se učvrsti u N točaka (čvorova), a elastične sile naprezanja određuju interpolacijsku krivulju, što daje glatke prijelaze između čvorova.
- Ideja: signal između uzoraka interpolirati odsječcima polinoma, a na rubovima izjednačiti njihove iznose i derivacije.

13

Interpolacija polinomom *m*-tog reda



T=1, radi jednostavnosti

A) Za i-ti interval imamo polinom:

$$X_i(t)=\sum_{k=0}^{m} a_i[k]\,t^k$$

$t\in[0,1]$ m neparan

B) Izjednačavanje s uzorcima:

$$X_i(0)=x[i]=a_i[0]$$

$$X_i(1)=x[i+1]=\sum_{k=1}^{m} a_i[k]$$

C) Izjednačavanje derivacija:

$$X_i^{(n)}(0)=X_{i-1}^{(n)}(1) \quad n=0,\dots,m-1$$

- Odsječci polinoma su na rubovima izjednačeni po iznosima sa uzorcima, a susjednim polinomima je na rubovima izjednačeno $m-1$ derivacija.

14

Kubni *spline*

A) Kubni polinom za i-ti interval :

$$X_i(t)=a_i+b_it+c_it^2+d_it^3 \qquad t\in[0,1]$$

i njegove derivacije:

$$X_i'(t)=b_i+2c_it+3d_it^2$$

$$X_i''(t)=2c_i+6d_it$$

B) Izjednačavanje s uzorcima (2 jednadž.):

$$X_i(0)=x[i]=a_i \qquad (1)$$

$$X_i(1)=x[i+1]=a_i+b_i+c_i+d_i \qquad (2)$$

C) Izjednačavanje derivacija (2 jednadžbe):

$$X_i'(0)=X_{i-1}'(1) \qquad b_i=b_{i-1}+2c_{i-1}+3d_{i-1} \qquad (3)$$

$$X_i''(0)=X_{i-1}''(1) \qquad 2c_i=2c_{i-1}+6d_{i-1} \qquad (4)$$

- Svaki interval daje 4 jednadžbe i 4 nepoznanice → ukupan sustav ima 4×N jednadžaba i isto toliko nepoznanica, pa se može riješiti.
- Za rješavanje je potrebno svih N uzoraka signala!

15

Rješenje sustava

- Sustav ćemo rješavati rekurzivno.
- Za početak, imamo (1): $a_i=x[i]$
- Uvedimo oznaku za uzorak derivacije: $D[i]=X_i'(0)$

$$X_i'(0)=b_i \qquad b_i=D[i]$$

- Iz (2) dobivamo: $x[i+1]=x[i]+D[i]+c_i+d_i$
- Iz (3) slijedi: $D[i+1]=D[i]+2c_i+3d_i$

riješimo po c_i i d_i

$$d_i=-2x[i+1]+2x[i]+D[i+1]+D[i]$$

$$c_i=3x[i+1]-3x[i]-D[i+1]-2D[i]$$

- Uvrstimo u (4) i imamo jednadžbu diferencija:

$$D[i+1]+4D[i]+D[i-1]=3x[i+1]-3x[i-1]$$

16

Rješenje sustava u Z-domeni

$$D[i+1]+4D[i]+D[i-1]=3x[i+1]-3x[i-1]$$

- U Z-domeni imamo:

$$\left(z+4+z^{-1}\right)D(z)=3\left(z-z^{-1}\right)X(z) \qquad D(z)=3\frac{z-z^{-1}}{z+4+z^{-1}}X(z)$$

- Do uzoraka derivacije $X_i'(0)=D[i]=b_i$ dolazimo određivanjem odziva diskretnog IIR filtra!
- Koeficijenti a_i jednaki su uzorcima signala $x[k]$.
- Izrazi za c_i i d_i s prethodnog slajda daju i preostale koeficijente (izrazi vode na FIR filtre).
- Problem: IIR filtar nije kauzalan!

17

Realizacija kubnog *spline*a filtrima

- Nekauzalnost FIR filtara se lako može riješiti dodavanjem kašnjenja, ali to nije slučaj s IIR filtrima!
- Nazivnik razložimo na kauzalnu i antikauzalnu komponentu:

$$\frac{1}{z+4+z^{-1}}=\underbrace{\frac{1}{1-z_1z^{-1}}}_{\text{kauzalni dio}}\cdot\underbrace{\frac{1}{z-z_2}}_{\text{antikauzalni dio}}$$

$$z_1=-2+\sqrt{3}$$

$$z_2=-2-\sqrt{3}\quad =1/z_1$$

Recipročna vrijednost

- Najprije primijenimo kauzalni dio, zatim preokrenemo rezultat u vremenu i primijenimo antikauzalni dio, te ga opet preokrenemo!
- To je moguće samo za konačne signale.

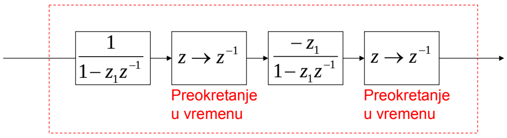
18

Realizacija kubnog *spline*a filtrima

- Preokretanje u vremenu odgovara zamjeni $z \to 1/z$.

$$\underbrace{\frac{1}{z-z_2}}_{\text{antikauzalni dio}}\Bigg|_{z\to z^{-1}} = \frac{1}{z^{-1}-z_2} = \frac{-z_2^{-1}}{1-z_2^{-1}z^{-1}} = \frac{-z_1}{1-z_1 z^{-1}}$$

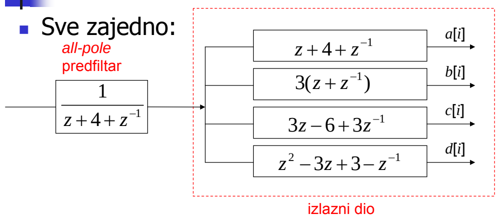
- Konačno imamo realizaciju *all-pole* predfiltra:



19

Realizacija kubnog *spline*a filtrima

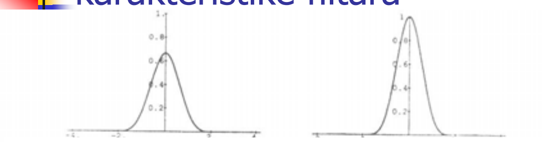
- Sve zajedno:



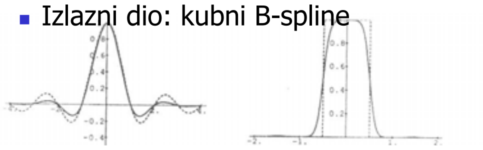
- Često se posebno promatra impulsni odziv izlaznog dijela, koji je konačan, te ukupan beskonačan impulsni odziv interpolatora.

20

Impulsni odzivi i frekvencijske karakteristike filtara



- Izlazni dio: kubni B-spline



- Ukupni odziv: kardinalni kubni spline

21

Premotavanje fazne karakteristike

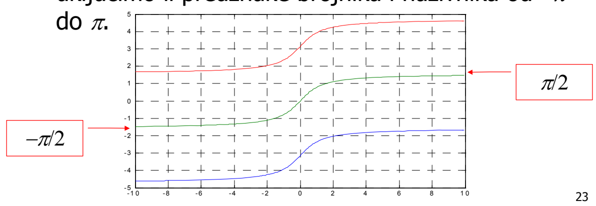
Prof. dr. sc. Damir Seršić
http://ts.zesoi.fer.hr

22

Premotavanje fazne karakteristike

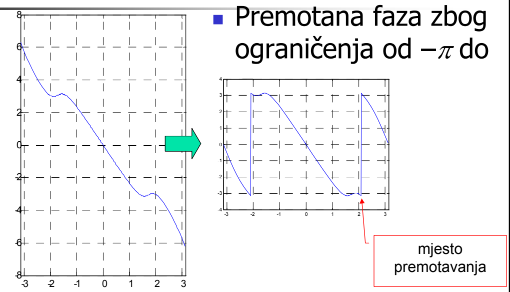
$$\angle H(e^{j\omega}) = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im} H(e^{j\omega})}{\operatorname{Re} H(e^{j\omega})}\right)$$

- Arkus tangens je višeznačna funkcija.
- Redovito dobivamo rješenje od $-\pi/2$ do $\pi/2$, a uključimo li predznake brojnika i nazivnika od $-\pi$ do π.



23

Premotavanje fazne karakteristike



- Premotana faza zbog ograničenja od $-\pi$ do π
- Ideja: derivacija *arctg* nije višeznačna!

24

Izračun grupnog kašnjenja

$$\tau\left(e^{j\omega}\right) = -\frac{d}{d\omega}\angle H(e^{j\omega}) = -\frac{d}{d\omega}\arctan\left(\frac{\operatorname{Im} H(e^{j\omega})}{\operatorname{Re} H(e^{j\omega})}\right)$$

(kraće zapisano)
$$= -\frac{1}{1+\left(\frac{\operatorname{Im}}{\operatorname{Re}}\right)^2}\frac{d}{d\omega}\left(\frac{\operatorname{Im}}{\operatorname{Re}}\right) = -\frac{\operatorname{Re}^2}{\operatorname{Re}^2+\operatorname{Im}^2}\left(\frac{\operatorname{Im}'\operatorname{Re}-\operatorname{Im}\operatorname{Re}'}{\operatorname{Re}^2}\right)$$

$$= \frac{\operatorname{Im}\operatorname{Re}'-\operatorname{Im}'\operatorname{Re}}{\operatorname{Im}^2+\operatorname{Re}^2}$$
(zbog preglednosti svuda izostavljeno $H(e^{j\omega})$)

- Izraz daje grupno kašnjenje, a integral grupnog kašnjenja je nepremotana faza:

$$\theta\left(e^{j\omega}\right) = -\int_0^{\omega} \tau\left(e^{jw}\right) dw + \theta_0$$

25

- Iako su prethodni slajdovi napravljeni za fazno-frekvencijsku karakteristiku i grupno kašnjenje, svi zaključci su identični i za analitički signal, odnosno trenutnu frekvenciju.

26