

Fourierov spektar signala

Fourierov red

2/129

- Složeni periodički signal :

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}(t + nT), \quad n \in \mathbb{Z}$$

može se aproksimirati trigonometrijskim polinomom:

sinteza:
$$\tilde{x}(t) = \sum_{-N}^N a_n e^{j\omega_n t}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

odnosno sumom eksponencijala.

- Za realni $\tilde{x}(t)$ kompleksne amplitude su konjugirane.

Fourierov red (nastavak)

3/129

$$a_{-n} = a_n^*; \quad a_n = A_n e^{j\varphi_n}, \quad a_n^* = A_n e^{-j\varphi_n}$$

$$\tilde{x}_n(t) = A_n (e^{j\varphi_n} e^{j\omega_n t} + e^{-j\varphi_n} e^{-j\omega_n t})$$

$$\tilde{x}_n(t) = 2A_n \cos(\omega_n t + \varphi_n)$$

- Koeficijenti a_n Fourierovog reda obično se određuju tako da se gornji red pomnoži s $e^{-jn\omega_0 t}$ i integrira u osnovnom periodu T .
- Odatle izlazi Fourierov koeficijent a_n

analiza:
$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{x}(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = X[n]$$

Svojstva Fourierovog Reda

4/129

$$\tilde{x}(t) = \sum X[n] e^{jn\omega_0 t}$$

$$\tilde{x}(t) \leftrightarrow X[n] \quad \tilde{x}(t) \leftrightarrow X(n\omega_0) \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$a\tilde{u}(t) + b\tilde{v}(t) \leftrightarrow aU(n\omega_0) + bV(n\omega_0)$$

$$a\tilde{u}(t) + b\tilde{v}(t) \leftrightarrow aU[n] + bV[n]$$

$$x(t + \tau) \leftrightarrow X[n] e^{jn\omega_0 \tau}$$

$$x(t) e^{jm\omega_0 t} \leftrightarrow X[n + m]$$

Svojstva Fourierovog Reda (nastavak)

5/129

$$\tilde{y}(t) = \frac{1}{T} \tilde{f}(t) * \tilde{g}(t) \leftrightarrow F[n] \cdot G[n]$$

$$Y[n] = F[n] * G[n] \leftrightarrow \tilde{f}(t) \cdot \tilde{g}(t)$$

$$\tilde{y}(t) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{u}(t) \cdot \tilde{v}(t - \tau) d\tau \leftrightarrow \tilde{u} * \tilde{v} \quad \text{cirkularna konvolucija}$$

$$Y[n] = U[n] * V[n] \leftrightarrow \tilde{u}(t) \cdot \tilde{v}(t)$$

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |\tilde{x}(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |X[n]|^2$$

Pojčćenje Fourierovog reda

6/129

- Elementarni signali u Fourierovom redu su eksponencijale, koje zadovoljavaju uvjet ortogonalnosti

$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{jn\omega_0 t} e^{-jm\omega_0 t} dt = \begin{cases} T, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

Napisano općenito za vremenski kontinuirane i diskretne signale

$$\int_{-T/2}^{T/2} \varphi_n(t) \varphi_m^*(t) dt = \begin{cases} K_n, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

$$\sum_0^{K-1} \varphi_n(k) \varphi_m^*(k) = \begin{cases} K_n, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

Pooćenje Fourierovog reda (nastavak)

- Pri predstavljanju složenih signala linearnom kombinacijom elementarnih signala, često se upotrebljavaju ortogonalne funkcije.

$$x(t) \cong \sum_{n=0}^N a_n \varphi_n(t) \quad \text{ili} \quad x[k] \cong \sum_{n=0}^N a_n \varphi_n[k]$$

- Koeficijenti a_n mogu se odrediti na temelju minimalne greške aproksimacije. Pogodna karakterizacija greške je integral ili suma kvadrata greške u danom intervalu.

$$\varepsilon = \frac{1}{k_2 - k_1} \sum_{k_1}^{k_2} \left[x[k] - \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n[k] \right]^2$$

Pooćenje Fourierovog reda (nastavak)

- Nađimo optimalne koeficijente a_1 i a_2 traženjem minimuma greške

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial a_2} = 0$$

$$\varepsilon = \sum_k \left\{ x^2[k] - 2x[k][a_1 \varphi_1[k] + a_2 \varphi_2[k]] + [a_1 \varphi_1[k] + a_2 \varphi_2[k]]^2 \right\}$$

- Pri kvadriranju sumacije otpadaju miješani članovi zbog ortogonalnosti, tako da izlaze uvjeti ekstrema:

Pooćenje Fourierovog reda (nastavak)

$$-2x[k]\varphi_1[k] + 2a_1\varphi_1^2[k] = 0$$

$$-2x[k]\varphi_2[k] + 2a_2\varphi_2^2[k] = 0$$

- Odakle izlaze optimalni koeficijenti a_1 i a_2

$$a_1 = \frac{\sum x[k]\varphi_1[k]}{\sum \varphi_1^2[k]} = \frac{\alpha_1}{K_1}$$

$$a_2 = \frac{\sum x[k]\varphi_2[k]}{\sum \varphi_2^2[k]} = \frac{\alpha_2}{K_2}$$

Pooćenje Fourierovog reda (nastavak)

- Kvadratna greška aproksimacije konačnom sumom do N

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{k_2 - k_1} \sum_{k_1}^{k_2} \left[x[k] - \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n[k] \right]^2 = \\ &= \frac{1}{k_2 - k_1} \sum_{k_1}^{k_2} \left[x^2[k] + \sum_n a_n^2 \varphi_n^2[k] - 2x \sum_n a_n \varphi_n[k] \right] = \\ &= \frac{1}{k_2 - k_1} \left[\sum_{k_1}^{k_2} x^2[k] + \sum_n a_n^2 K_n - 2 \sum_n a_n \alpha_n \right] \end{aligned}$$

Pooćenje Fourierovog reda (nastavak)

- ako nadopunimo desne članove s $+\frac{\alpha_n^2}{K_n}$ funkcija kvadrat $\left(a_n^2 K_n - 2a_n \alpha_n + \frac{\alpha_n^2}{K_n} \right) - \frac{\alpha_n^2}{K_n}$

$$\text{izlazi} \quad \left(a_n \sqrt{K_n} - \frac{\alpha_n}{\sqrt{K_n}} \right)^2 - \frac{\alpha_n^2}{K_n}$$

Pooćenje Fourierovog reda (nastavak)

- Budući da za optimalne koeficijente vrijedi $a_n = \alpha_n / K_n$ najmanja greška je dana s

$$\varepsilon = \sum_k x^2[k] - \sum_n \frac{\alpha_n^2}{K_n}$$

odnosno zbog $\alpha_n^2 / K_n = a_n^2 K_n$

$$\varepsilon = \sum_{k_1}^{k_2} x^2[k] - \sum_1^N a_n^2 K_n$$

- kako su sumandi nenegativni može se zaključiti da s većim N greške aproksimacije su sve manje.

Poopćenje Fourierovog reda (nastavak)

- Kad N raste bez granica suma $\sum_n a_n^2 K_n$ konvergira sumi $\sum_k x^2[k]$ što predstavlja energiju signala.

- U tom slučaju vrijedi

$$\sum_{k=1}^K x^2[k] = \sum_1^N a_n^2 K_n$$

što je generalizirani oblik Parsevalove relacije.

Poopćenje Fourierovog reda (nastavak)

Ako vrijedi za neki niz $x[k]$ kaže se da suma $\sum_n a_n \phi_n[k]$ u prosjeku konvergira nizu $x[k]$.

Vremenski diskretni Fourierov red (DFT)

Uzmimo periodičan niz za koji vrijedi

$$\tilde{x}[k] = \tilde{x}[k + Nr], \quad r \in \mathbb{Z}$$

Kao kod kontinuiranog periodičnog signala može se razložiti na sumu periodičkih sinusoida ili eksponencijala frekvencija koje su cjelobrojni višekratnici osnovne $2\pi/N$

$$g_n[k] = e^{\frac{2\pi}{N}kn} = e^{\frac{2\pi n}{N}(k+rN)} = e_n[k+rN]$$

Vremenski diskretni Fourierov red (DFT) (nastavak)

Budući da su eksponencijale diskretne najviša frekvencija koja se može jednoznačno predstaviti je s $n=N-1$. Sve ostale $n \geq N$ mogu se naći među onima iz intervala $[0, N-1]$. Među svim eksponencijalima perioda N mogu se dakle naći samo N različitih

$$g_0, g_1, \dots, g_{N-1}$$

jer: $g_0[k] = g_N[k], g_1[k] = g_{N+1}[k], \dots$

Vremenski diskretni Fourierov red (DFT) (nastavak)

Periodičan niz $\tilde{x}[k]$ dakle se može predstaviti s N diskretnih eksponencijala

$$\tilde{x}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

Optimalni koeficijenti koji osiguravaju minimum sume kvadrata greške mogu se dobiti iz općeg izraza za razlaganje signala na ortogonalne nizove.

Vremenski diskretni Fourierov red (DFT) (nastavak)

Optimalni koeficijenti su:

$$a_n = \frac{\sum_0^{N-1} x[n] \phi_n^*[k]}{\sum_0^{N-1} \phi_n[k] \phi_n^*[k]} = \frac{\sum_0^{N-1} x[k] e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}}{N}$$

Vremenski diskretni Fourierov red (DFT) (nastavak)

$$\tilde{X}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}[k] e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}; \quad \tilde{x}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{X}[n] e^{j\frac{2\pi nk}{N}}$$

čine par izraza koji se nazivaju diskretnom Fourierovom transformacijom (DFT)

Kako se vidi niz koeficijenata a_n je također periodičan niz tj. $a_n = a_{n+N} = \tilde{X}[n]$

s periodom N : $e^{j2\pi kn/N} \cdot e^{j2\pi nN/N} = e^{j2\pi kn/N}$

DFT povezuje N uzoraka jednog perioda periodičkog signala s N uzoraka periodičkog spektra.

Koeficijent $1/N$ se nekad pridružuje izrazu za $\tilde{x}[k]$.

Vremenski diskretni Fourierov red (DFT) (nastavak)

Pogreška aproksimacije

Suma kvadrata greški VDFR-a ili DTFT-a se može dobiti iz općeg izraza () i $K_n = N$

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi k(n-m)}{N}} = \begin{cases} N, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

$$\varepsilon = \sum_{k=0}^{N-1} x^2[k] - \sum_{n=0}^{N-1} a_n^2 N = 0.$$

Vremenski diskretni Fourierov red (DFT) (nastavak)

$$X[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] W^{nk}$$

$$x[k] = \sum_{n=0}^{N-1} X[n] e^{j\frac{2\pi nk}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} X[n] W^{-nk}$$

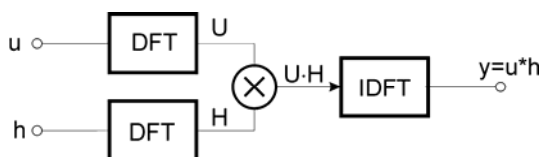
$$W = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

Periodičnost niza i periodičnost spektra

- Izvan područja $n \in [0, N-1]$ se nizovi signala i spektra ne ponavljaju.
- Izraz $[k-i] \bmod N$ znači da $[k-i]$ treba dijeliti s N i sačuvati samo ostatak.
- Da bi se preko cirkularne konvolucije stiglo na linearnu trebat će nadopuniti impulsima oba niza tako da period bude jednak cirkularnoj dužini konvolucije.
- Za slučaj dužine sekvencije M i N konvolucija će biti dužine $M+N-1$.

Periodičnost niza i periodičnost spektra (nastavak)

- Odziv sustava kao linearna konvolucija traži više multiplikacija nego pretvorba u spektar oba signala pobude i odziva na uzorak množenjem spektara i inverzijom.



Svojstva DTFS (DFT)

Linearnost

$$\text{DTFS}\{a\tilde{u}[k] + b\tilde{v}[k]\} = a\tilde{U}[n] + b\tilde{V}[n]$$

Posmak

$$\{\tilde{x}[k-i] \bmod N\} \leftrightarrow \tilde{X}[n] e^{-j\frac{2\pi ni}{N}}$$

Konvolucija cirkularna

$$\sum_{i=0}^{N-1} \tilde{u}[k-i] \bmod N \tilde{v}[i] \leftrightarrow \tilde{U}[n] \cdot \tilde{V}[n]$$

Parseval

$$\sum_{k=0}^{N-1} |\tilde{x}[k]|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |\tilde{X}[n]|^2$$

Vremenski diskretna Fourierova transformacija

25/129

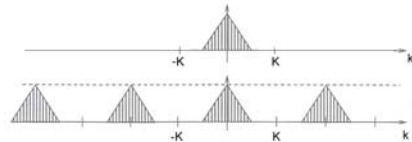
Jednostavan prijelaz iz Fourierovih redova u transformaciju može se dobiti prikazom aperiodičkog signala kao graničnog slučaja periodičkog signala kad period ponavljanja teži u beskonačnost.

Vremenski diskretna Fourierova transformacija (nastavak)

26/129

Pretpostavimo da je aperiodički signal $x[k]$ dan jednim periodom signala $\tilde{x}[k]$, koji je periodičan s N .

$$x[k] = \begin{cases} \tilde{x}[k], & -K \leq k \leq K \\ 0, & |k| \geq K \end{cases} \quad N = 2K + 1$$



Vremenski diskretna Fourierova transformacija (nastavak)

27/129

Kad K raste, razmak između sekcija signala se povećava, te za $K \rightarrow \infty$ replike se udaljavaju u beskonačnost.

$$x[k] = \lim_{K \rightarrow \infty} \tilde{x}[k]$$

Vremenski Diskretni Fourierov red periodičkog niza $\tilde{x}[k]$ je:

$$\tilde{x}[k] = \sum_{n=-K}^K \tilde{X}[n] e^{j \frac{2\pi kn}{N}} \quad \tilde{X}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=-K}^K \tilde{x}[k] e^{-j \frac{2\pi kn}{N}}$$

Vremenski diskretna Fourierova transformacija (nastavak)

28/129

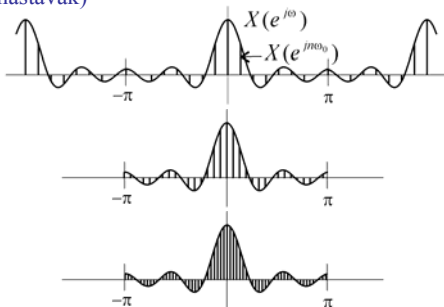
Budući da je $x[k] = \tilde{x}[k]$ za $-K \leq k \leq K$ i $x[k] = 0$ za $k > K$ izlazi

$$X[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=-K}^K x[k] e^{-j \frac{2\pi nk}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-j \frac{2\pi nk}{N}}$$

$X[n]$ je periodičan s N . Spektralni uzorci su s razmakom $2\pi/N = \omega_0$

Vremenski diskretna Fourierova transformacija (nastavak)

29/129



Slika prikazuje uzorke spektra i njihovu ovojnicu, koja je periodična s 2π . Za veći N uzorci postaju sve gušći.

Vremenski diskretna Fourierova transformacija (nastavak)

30/129

Zamislimo da tom nizu uzoraka na slici spektra odredimo normiranu ovojnicu kontinuiranu periodičku funkciju, tako da vrijedi

$$X[n] = \frac{1}{N} X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=n\omega_0}$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-j\omega k}$$

$$X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=n\omega_0} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-jn\omega_0 k}$$

Vremenski diskretna Fourierova transformacija (nastavak)

Sad se periodički spektar može izraziti s normiranom ovojnicom

$$\tilde{x}[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=-K}^{+K} X(e^{j\omega_0 n}) e^{j\omega_0 n k}$$

$$x[k] = \frac{\omega_0}{2\pi} \sum_{n=-K}^{+K} X(e^{j\omega_0 n}) e^{j\omega_0 n k}$$

Utjecaj graničnog prijelaza $N \rightarrow \infty$ je da smanjuje razmak ω_0 između komponenti spektra $\omega_0 = 2\pi/N$

Vremenski diskretna Fourierova transformacija (nastavak)

U sumaciji imamo vrijednosti $X(e^{j\omega_0 k}) \cdot e^{j\omega_0 k}$ množene sa širinom $\omega_0 = 2\pi/N$. Sumacija je pravokutna aproksimacija integrala.

Kad $N, K \rightarrow \infty$, $\omega = k\omega_0$, $d\omega = \omega_0$, a suma prelazi u integral

$$x[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) \cdot e^{j\omega k} d\omega$$

Vremenski diskretna Fourierova transformacija (nastavak)

Time smo dobili aperiodički niz $x[k]$ kao superpoziciju eksponencijala ili sinusoida. Težinska funkcija je spektar

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot e^{-j\omega k}$$

pa zajedno sa integralom čini par koji se naziva vremenski diskretnom Fourierovom transformacijom VDFT (engl. Discrete Time Fourier Transform DTFT).

Vremenski diskretna Fourierova transformacija (nastavak)

Uvjet da aperiodički niz ima DTFT je da njegova sumacija apsolutno konvergira

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |x[k]| < \infty.$$

Svojstva DTFT

Linearnost

$$a u[n] + b v[n] \leftrightarrow a U(e^{j\omega}) + b V(e^{j\omega})$$

Posmak

$$x[k-i] \leftrightarrow e^{-j\omega i} X(e^{j\omega})$$

Konvolucija

$$u^* v = \sum_{i=-\infty}^{\infty} u[i] v[k-i] \leftrightarrow U(e^{j\omega}) \cdot V(e^{j\omega})$$

Svojstva DTFT (nastavak)

Parseval

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i] x^*[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} |x[i]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

Množenje

$$u[k] v[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} U(e^{j\Theta}) V(e^{j(\omega-\Theta)}) d\Theta \quad \text{periodična konvolucija}$$

Fourierova transformacija

37/129

Upotrebljava se za predstavljanje aperiodskih signala superpozicijom eksponencijala ili sinusoida. Može se izvesti iz Fourierovog reda, tako da se aperiodski signal dobije kao granični slučaj periodičnog signala, čiji period ide u beskonačnost. Slično kao kod DTFT

$$x(t) = \begin{cases} \tilde{x}(t), & -T/2 \leq t \leq T/2 \\ 0, & |t| > T/2 \end{cases} \quad x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \tilde{x}(t)$$

Fourierova transformacija (nastavak)

38/129

Harmonijske komponente postaju guste, pa dobivamo iz sume integral:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$$
$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

Fourierov spektar signala

39/129

Spektar signala napisan u pravokutnom obliku sa svojim realnim i imaginarnim dijelom

$$X(j\omega) = X_r(j\omega) + jX_i(j\omega)$$

napisan u polarnom obliku sa svojim amplitudnim i faznim spektrom

$$X(j\omega) = |X(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

$$|X(j\omega)| = A(\omega), \quad X_r(\omega) = A(\omega) \cos \varphi(\omega)$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{X_i(\omega)}{X_r(\omega)}, \quad X_i(\omega) = A(\omega) \sin \varphi(\omega)$$

Fourierov spektar signala (nastavak)

40/129

Da bi frekvencija signala imala Fourierovu transformaciju mora zadovoljavati neke uvjete:

$$1. \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t) e^{-j\omega t}| dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty$$

Funkcija $x(t)$ mora biti apsolutno integrabilna te imati konačan broj maksimuma i minimuma, tj. konačan broj diskontinuiteta u konačnom intervalu.

Fourierov spektar signala (nastavak)

41/129

Transformacija postoji za praktički upotrebljive signale. Ima međutim signala kao što su stepenica i sinusoida koje nisu apsolutno integrabilne, ali se mogu predstaviti transformacijom, ako dozvolimo upotrebu impulsa u vremenskom i frekvencijskom domenu.

Fourierov spektar signala (nastavak)

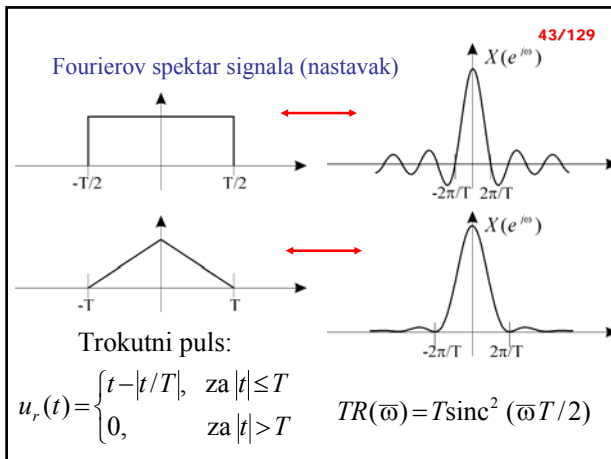
42/129

Primjer: Spektar pravokutnog pulsa.

Pravokutni puls je definiran:

$$r_c(t) = \begin{cases} 1, & \text{za } |t| < T/2 \\ 0, & \text{za } |t| > T/2 \end{cases}$$

$$R_c(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} r_c(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-T/2}^{T/2} 1 \cdot e^{-j\omega t} dt = \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \Big|_{-T/2}^{T/2} =$$
$$= \frac{e^{-j\omega T/2} - e^{j\omega T/2}}{-j\omega} = T \frac{\sin(\omega T/2)}{(\omega T/2)} = T \text{sinc}(\omega T/2)$$



44/129

Fourierov spektar signala (nastavak)

Simetrija FT među varijablama t i $\bar{\omega}$ omogućuju lagano određivanje odnosa između signala i spektra.

Ako je:

$$x(t) \leftrightarrow X(j\bar{\omega})$$

Tada je:

$$X(jt) \leftrightarrow 2\pi x(-\bar{\omega})$$

Dokaz slijedi iz izraza za $x(t)$ i zamjenom $t \rightarrow -\infty$

- 45/129
- Prolaz signala kroz linearan sustav
- Kako smo ranije rekli sustav je skup operacija na ulaznom signalu da bi se dobio izlazni signal.
 - Na temelju dosadašnjeg zaključujemo da se integralno vladanje sustava može odrediti iz njegovog odziva na impuls (KS) ili uzorak (DS) ili pak iz frekvencijske karakteristike.
 - Prema tome za linearne sustave imamo još dva matematička modela.

- 46/129
- Odziv na impuls ili na sinus pobudu
- Za razliku od mjerenja parametara sustava opisanog diferencijalnim jednadžbama, mjerenje impulsnog odziva ili frekvencijske karakteristike je dosta jednostavno.

47/129

Svojstva FT:	vrem. domena	frekv. domena
linearnost FT	$au(t) + bv(t)$	$aU(\omega) + bV(\omega)$
simetrija	$x(t) \leftrightarrow X(\omega)$	$X(t) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega)$
kompresija expom	$x(at) = \frac{1}{ a } X\left(\frac{\bar{\omega}}{a}\right)$	
konvolucija u VD	$x(t) \leftrightarrow X(\omega)$	$h(t) \leftrightarrow H(\omega)$ $x * h \leftrightarrow X(\omega) \cdot H(\omega)$
konvolucija u FD		$x \cdot h \leftrightarrow X(\omega) * H(\omega)$
vremenski pomak	$x(t - t_0)$	$X(\omega) e^{-j\omega t_0}$

48/129

Svojstva FT (nastavak):	vrem. domena	frekv. domena
frekvencijski pomak	$x(t) e^{j\omega_0 t}$	$X(\omega - \omega_0)$
vremenska derivacija	$\frac{d^n x}{dt^n}$	$(j\omega)^n X(\omega)$
vremenska integracija	$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) d\tau$	$\frac{X(\omega)}{j\omega} + \pi X(0) \delta(\omega)$
frekvencijska derivacija	$-jtx(t)$	$\frac{dX(\omega)}{d\omega}$
frekvencijska integracija	$\frac{x(t)}{-jt}$	$\int_{-\infty}^{+\infty} X(\Theta) d\Theta$
vremenska inverzija	$x(-t)$	$X(-\omega)$

49/129

Transformacije:	vrem. domena	frekv. domena
	$\delta(t) \leftrightarrow 1$ $1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$ $\cos \omega t \leftrightarrow \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$ $\sin \omega t \leftrightarrow j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$ $\operatorname{sgn} t \leftrightarrow \frac{2}{j\pi}$ $u(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$ $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{jn\omega_1 t} \leftrightarrow 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \delta(\omega - n\omega_1)$	

50/129

Transformacije	vrem. domena	frekv. domena
(nastavak):	$e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$ $\sum_k \delta(t - kT) \leftrightarrow \omega_0 \sum_n \delta(\omega - n\omega_0)$ $\delta^{(n)}(t) \leftrightarrow (j\omega)^n$ $ t \leftrightarrow -\frac{2}{\omega^2}$ $t^n \leftrightarrow 2\pi j^n \delta^{(n)}(\omega)$	

Četiri oblika Fourier-ovog predstavljanja signala 51/129

VD	periodički signal	aperiodički signal	VD
kontinuirani signali	Fourierov red $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X[n] e^{jn\omega_0 t}$ $X[n] = \frac{1}{T} \int_{(T)} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$ $x(t) \text{ ima period } T \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$	Fourierova transformacija $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$ $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$	aperiodički spektar
	diskretni signali	Vremenski diskretna Fourierova transformacija $x[k] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X[n] e^{jn\omega_0 k}$ $X[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] e^{-jn\omega_0 k}$ $x(k) \text{ i } X[n] \text{ imaju period } N \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{N}$	
VD	diskretni spektar	kontinuirani spektar	FD
FD	VD-vremenska domena	FD-frekvencijska domena	

Papoulis

53/129

Time convolution theorem. The Fourier transform $F(\omega)$ of the convolution $f(t)$ of two functions $f_1(t)$ and $f_2(t)$ equals the product of the Fourier transforms $F_1(\omega)$ and $F_2(\omega)$ of these two functions. Thus if

$$f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega) \quad f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$$

then

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \leftrightarrow F_1(\omega) F_2(\omega) \quad (2-71)$$

Proof. To prove (2-71), we shall form the Fourier integral of $f(t)$ and will show that it equals $F_1(\omega) F_2(\omega)$. Clearly

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \right] dt \quad (2-72)$$

Changing the order of integration, we obtain

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} f_2(t - \tau) dt \right] d\tau$$

54/129

From the time-shifting theorem (2-36) we conclude that the bracket above equals $F_2(\omega) e^{-j\omega\tau}$; therefore

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) e^{-j\omega\tau} F_2(\omega) d\tau = F_1(\omega) F_2(\omega)$$

and (2-71) is proved.

Comment. In the above proof it was assumed that the order of integration in (2-72) can be changed. This is true if the functions $f_1(t)$ and $f_2(t)$ are square-integrable in the sense

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_i(t)|^2 dt < \infty \quad i = 1, 2 \quad (2-73)$$

i.e., if $f_1(t)$ and $f_2(t)$ have finite energy.

Frequency convolution theorem. From the above result (2-71) and the symmetry property (2-34) it follows that the Fourier transform $F(\omega)$ of the product $f_1(t)f_2(t)$ of two functions equals the convolution $F_1(\omega) * F_2(\omega)$ of their respective transforms $F_1(\omega)$ and $F_2(\omega)$ divided by 2π :

$$f_1(t)f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(y)F_2(\omega - y) dy \quad (2-74)$$

One could also give a direct proof of (2-74) as in the time-convolution theorem.

Parseval's formula. The following basic result, known as *Parseval's formula*, can be easily derived from (2-74); if $F(\omega) = A(\omega)e^{j\phi(\omega)}$ is the Fourier transform of $f(t)$, then

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A^2(\omega) d\omega \quad (2-75)$$

Indeed, from $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ and theorem (2-44) it follows that $f(t) \leftrightarrow \hat{F}(-\omega)$; therefore the Fourier integral of $|f(t)|^2 = f(t)\hat{f}(t)$ is the function $(1/2\pi)F(\omega) * \hat{F}(-\omega)$; i.e.,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(y)\hat{F}[-(\omega - y)] dy = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 e^{-j\omega t} dt \quad (2-76)$$

Putting $\omega = 0$ in (2-76), we obtain (2-75), because

$$F(y)\hat{F}(y) = A^2(y)$$

A. Ideal low-pass filter. A filter whose amplitude is constant for $|\omega| < \omega_c$ and zero for $|\omega| > \omega_c$ is called ideal low-pass (Fig. 6-4).

$$A(\omega) = \begin{cases} A_0 & \text{for } |\omega| < \omega_c \\ 0 & \text{for } |\omega| > \omega_c \end{cases} = A_0 p_{\omega_c}(\omega)$$

Its system function is given by

$$H(\omega) = A_0 p_{\omega_c}(\omega) e^{-j\omega t_0} \quad (6-20)$$

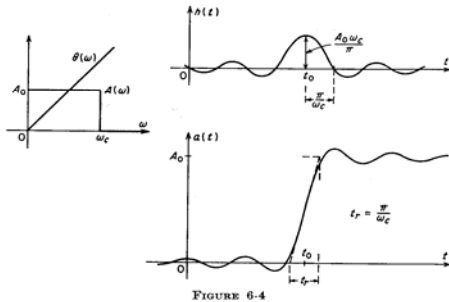


FIGURE 6-4

where $p_{\omega_c}(\omega)$ is a rectangular pulse, and its impulse response by

$$h(t) = \frac{A_0}{\pi} \int_0^{\omega_c} \cos \omega(t - t_0) d\omega = \frac{A_0 \sin \omega_c(t - t_0)}{\pi(t - t_0)} \quad (6-21)$$

with $h_{\max} = A_0 \omega_c / \pi$ and rise time $t_r = \pi / \omega_c$. To obtain the step response $a(t)$, we use (6-21) and (6-14):

$$a(t) = \frac{A_0}{2} + \frac{A_0}{\pi} \int_0^{t-t_0} \frac{\sin \omega_c \tau}{\tau} d\tau = \frac{A_0}{2} \left[1 + \frac{2}{\pi} \text{Si}[\omega_c(t - t_0)] \right] \quad (6-22)$$

E. Gaussian filter. The filter

$$H(\omega) = A_0 e^{-\alpha \omega^2} e^{-j\omega t_0} \quad (6-45)$$

shown in Fig. 6-15a is called Gaussian. To determine its impulse response $h(t)$, we use the result in (2-69)

$$h(t) = \frac{A_0}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\alpha \omega^2} \cos \omega(t - t_0) d\omega = \frac{A_0}{2\sqrt{\pi\alpha}} e^{-(t-t_0)^2/4\alpha} \quad (6-46)$$

The maximum h_{\max} of $h(t)$ and the rise time t_r [see (6-15)] are given by (Fig. 6-15b)

$$h_{\max} = A_0/2\sqrt{\pi\alpha} \quad t_r = 2\sqrt{\pi\alpha} \quad (6-47)$$

The step response is best obtained from the above and (6-14)

$$a(t) = \frac{A_0}{2} + \frac{A_0}{2\sqrt{\pi\alpha}} \int_0^{t-t_0} e^{-r^2/4\alpha} dr \quad (6-48)$$

and can be expressed in terms of the tabulated error function $\text{erf } x$ defined by

$$\text{erf } x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2} dy \quad (6-49)$$

Inserting into (6-48), we obtain the function

$$a(t) = \frac{A_0}{2} \left(1 + \text{erf} \frac{t - t_0}{2\sqrt{\pi\alpha}} \right) \quad (6-50)$$

shown in Fig. 6-15c. As is proved in Sec. 4-4, this filter has the property of minimizing the product of the RMS durations of $h(t)$ and $A(\omega)$.

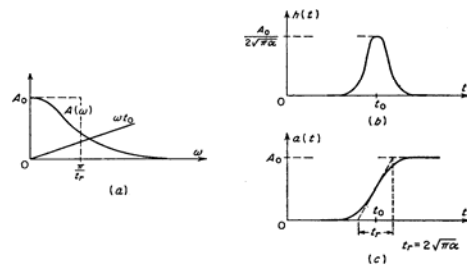
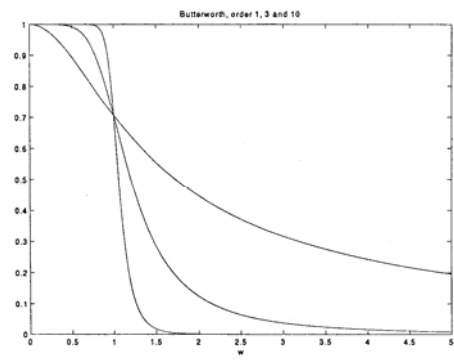
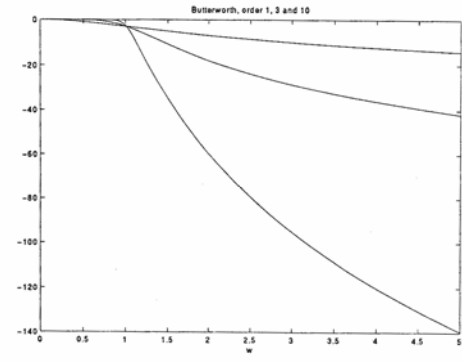


FIGURE 6-15

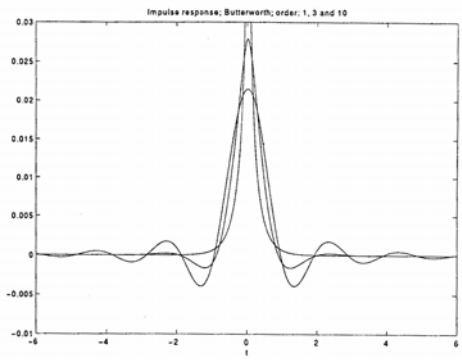
61/129



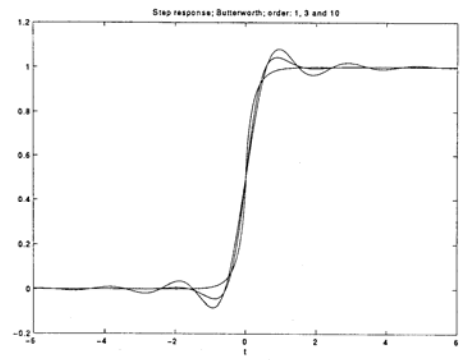
62/129



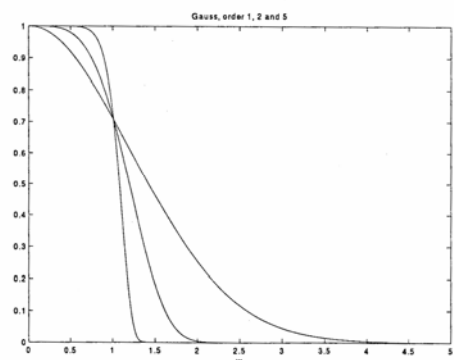
63/129



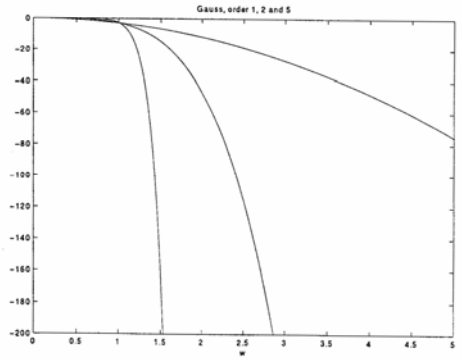
64/129

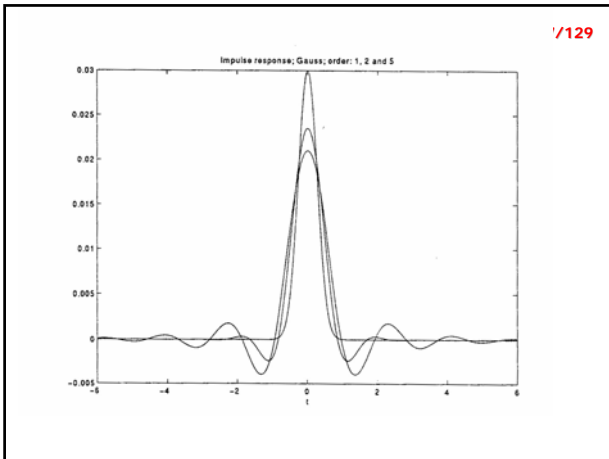


65/129

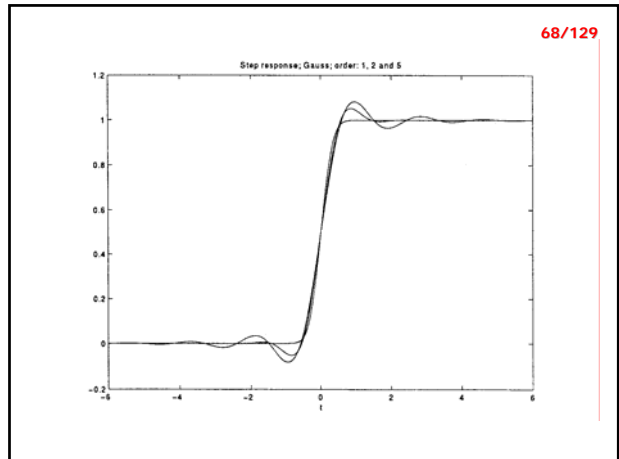


66/129





7/129



68/129

69/129

Hilbert transforms. In the following we shall give explicit equations relating the real and imaginary parts of a causal system function. If the causal function $h(t)$ contains no singularities at the origin, then with $H(\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$ its Fourier integral, $R(\omega)$ and $X(\omega)$ satisfy the equations

$$X(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(y)}{\omega - y} dy \quad (10-28)$$

$$R(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(y)}{\omega - y} dy \quad (10-29)$$

known as Hilbert transforms.

70/129

First Proof: Convolution Theorem. We denote by $h_e(t)$ and $h_o(t)$ the even and odd parts of $h(t)$ shown in Fig. 10-2; since $h_e(t) = h_o(t)$ for $t > 0$ and $h_e(t) = -h_o(t)$ for $t < 0$, we conclude that

$$h_o(t) = h_e(t) \operatorname{sgn} t \quad (10-30)$$

$$h_e(t) = h_o(t) \operatorname{sgn} t \quad (10-31)$$

where $\operatorname{sgn} t$ is the sign function of Fig. 2-8. The Fourier integrals of $h_e(t)$ and $h_o(t)$ are $R(\omega)$ and $jX(\omega)$ respectively, and the Fourier integral of $\operatorname{sgn} t$ equals $2/j\omega$:

$$h_e(t) \rightarrow R(\omega) \quad h_o(t) \rightarrow jX(\omega) \quad \operatorname{sgn} t \rightarrow \frac{2}{j\omega} \quad (10-32)$$

Since $h_o(t)$ is the product of $h_e(t)$ and $\operatorname{sgn} t$, we conclude from the frequency convolution theorem (2-74) that

$$jX(\omega) = \frac{1}{2\pi} R(\omega) * \frac{2}{j\omega}$$

from which (10-28) follows. We similarly obtain (10-29) from (10-31).

71/129

Hilbert transforms. If the function $H(\omega)$ is minimum-phase-shift, then $\ln H_1(p)$ is analytic in the right-hand plane; in this case the attenuation and phase of $H(\omega) = e^{-\alpha(\omega) - j\theta(\omega)}$ are related by the following set of equations similar to (10-28) and (10-29):

$$\theta(\omega_0) = \frac{\omega_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha(\omega)}{\omega^2 - \omega_0^2} d\omega \quad (10-67)$$

$$\alpha(\omega_0) = \alpha(0) - \frac{\omega_0^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta(\omega)}{\omega(\omega^2 - \omega_0^2)} d\omega \quad (10-68)$$

Thus $\theta(\omega)$ can be uniquely determined from $\alpha(\omega)$, and for the determination of $\alpha(\omega)$ one needs not only $\theta(\omega)$ but also the constant $\alpha(0)$. From the proof it will become clear that the above equations are not the only ones relating $\alpha(\omega)$ to $\theta(\omega)$; other sets of similar relationships can be derived (see H. W. Bode, op. cit.).

72/129

Example 10-9. Consider a causal low-pass minimum-phase-shift filter with amplitude characteristic

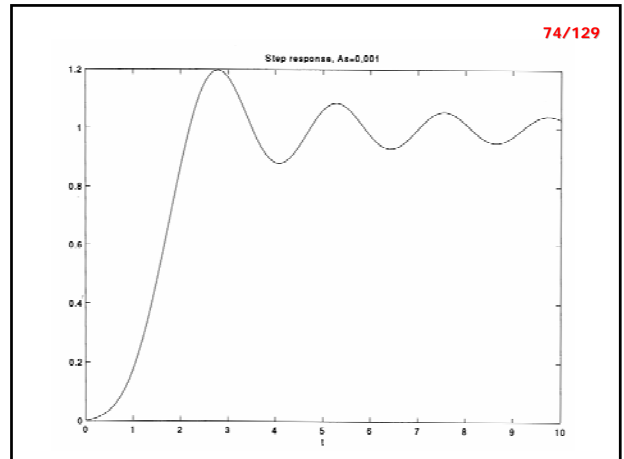
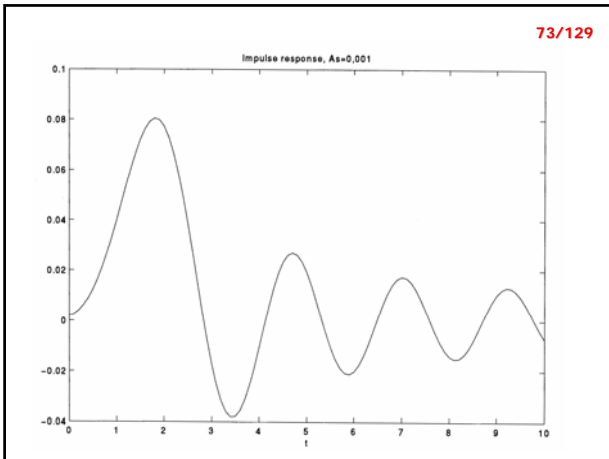
$$A(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \\ A_s & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

as in Fig. 10-11a. Its phase shift $\theta(\omega)$ cannot be assigned arbitrarily but must be given by (10-67)

$$\theta(\omega) = \frac{-2\omega}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln A_s}{y^2 - \omega_c^2} dy = \frac{\ln A_s}{\pi} \ln \left| \frac{\omega - \omega_c}{\omega + \omega_c} \right|$$

as shown in Fig. 10-11b. The resulting group delay in the passband, equals

$$t_{gr}(\omega) = \theta'(\omega) = \frac{2 \ln A_s}{\pi} \frac{\omega_c}{\omega^2 - \omega_c^2} \quad |\omega| < \omega_c$$



75/129

Thus the group delay is proportional to the attenuation in the stop band and it tends to infinity as A_s tends to zero. The quantity

$$t_{gr}(0) = \frac{2 |\ln A_s|}{\pi \omega_c}$$

equals the delay of the center of gravity of the input as it passes through the filter, and it is proportional to $|\ln A_s|$.

(a)

(b)

FIGURE 10-11

76/129

(a)

(b)

FIGURE 6-23

(c)

(d)

77/129

Example 10-10. As an application of (10-68), we shall evaluate the attenuation of a filter with a phase shift given by the curve

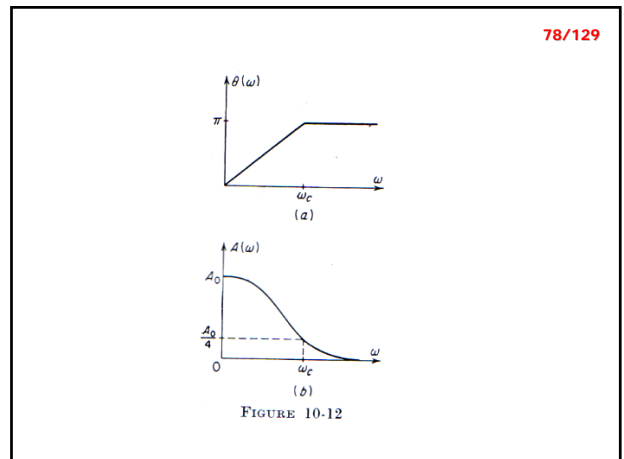
$$\theta(\omega) = \begin{cases} t_0 \omega & |\omega| < \omega_c \\ t_0 \omega_c & \omega > \omega_c \end{cases}$$

of Fig. 10-12a. A noncausal filter with the same phase was discussed in Sec. 6-4. Inserting the above characteristic into (10-68), we obtain

$$\alpha(\omega) = \alpha(0) - \frac{2\omega^2}{\pi} \int_0^{\omega_c} \frac{t_0 dy}{(y^2 - \omega^2)} - \frac{2\omega^2}{\pi} \int_{\omega_c}^{\infty} \frac{t_0 \omega_c dy}{(y^2 - \omega^2)}$$

$$= \alpha(0) + \frac{t_0 \omega_c}{\pi} \left[\left(1 + \frac{\omega}{\omega_c}\right) \ln \left(1 + \frac{\omega}{\omega_c}\right) + \left(1 - \frac{\omega}{\omega_c}\right) \ln \left|1 - \frac{\omega}{\omega_c}\right| \right]$$

The corresponding amplitude $A(\omega) = e^{-\alpha(\omega)}$ is shown in Fig. 10-12b for $t_0 \omega_c = \pi$.



Specification of $\alpha(\omega)$ and $\theta(\omega)$ in different parts of the ω axis. We shall now show that $H(\omega)$ is uniquely determined if $\alpha(\omega)$ and $\theta(\omega)$ are specified in complementary parts of the ω axis. We shall first consider the case

$$\begin{aligned} \alpha(\omega) & \text{ given for } |\omega| < \omega_c & (10-81) \\ \theta(\omega) & \text{ given for } |\omega| > \omega_c \end{aligned}$$

To find the unknown parts of $\alpha(\omega)$ and $\theta(\omega)$, we shall use a modified form of the Hilbert transforms. We note first that Eqs. (10-67) and (10-68) establish the ω -axis relationship between the real and imaginary parts of a function that is analytic in the right-hand plane. Our problem will therefore be solved if we can find a function whose real part depends on the available information (10-81).

212 INTEGRAL THEOREM:

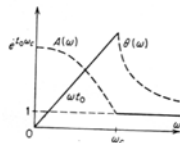


FIGURE 10-13

$$\begin{aligned} A(\omega) &= 1 & \omega > \omega_c \\ \theta(\omega) &= \omega/\omega_c & \omega < \omega_c \end{aligned}$$

Example 10-11. We shall use the above result (10-84) to determine a causal, low-pass filter, with linear phase shift $\theta(\omega) = \omega t_0$ in the bandpass $|\omega| < \omega_c$, and a constant amplitude in the stopband $|\omega| > \omega_c$ as in Fig. 10-13. We shall assume, without loss of generality, that $A(\omega) = 1$ for $|\omega| > \omega_c$. With this assumption, the second integral in (10-84) vanishes, and the unknown parts of $\alpha(\omega)$ and $\theta(\omega)$ are given by

$$\frac{-2t_0\sqrt{\omega_c^2 - \omega^2}}{\pi} \int_0^{\omega_c} \frac{y^2 dy}{\sqrt{\omega_c^2 - y^2}(y^2 - \omega^2)} = \begin{cases} \alpha(\omega) & 0 < \omega < \omega_c \\ \theta(\omega) & \omega > \omega_c \end{cases}$$

The above integral can be easily evaluated; the result is

$$\begin{aligned} \alpha(\omega) &= -t_0\sqrt{\omega_c^2 - \omega^2} & 0 < \omega < \omega_c \\ \theta(\omega) &= t_0\omega - t_0\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2} & \omega > \omega_c \end{aligned}$$

The computed parts of the functions $\theta(\omega)$ and

$$A(\omega) = e^{t_0\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}$$

are shown by the dotted lines in Fig. 10-13.

Ideal High-pass Filter. The frequency characteristics of an ideal high-pass filter are given by

$$A(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{for } |\omega| < \omega_c \\ A_0 & \text{for } |\omega| > \omega_c, \theta(\omega) = \omega t_0 \end{cases} \quad (6-28)$$

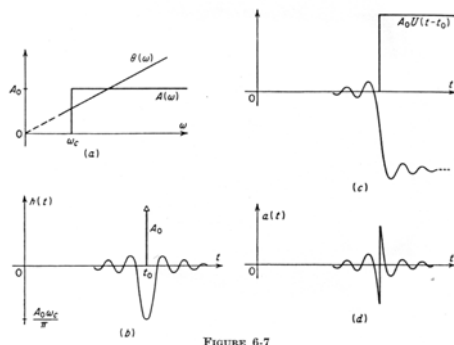


FIGURE 6-7

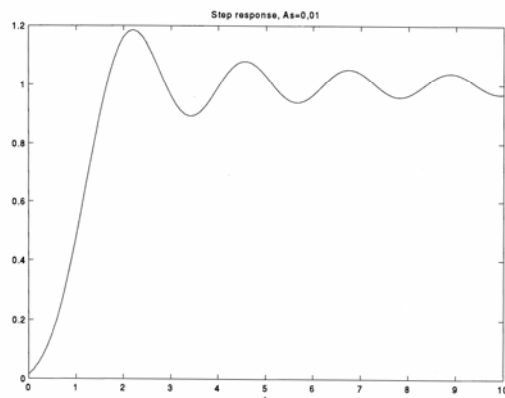
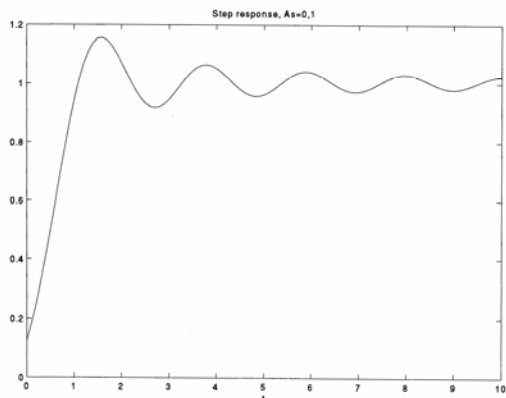
Paley-Wiener condition.† A necessary and sufficient condition for a square-integrable function $A(\omega) \geq 0$ to be the Fourier spectrum of a causal function is the convergence of the integral

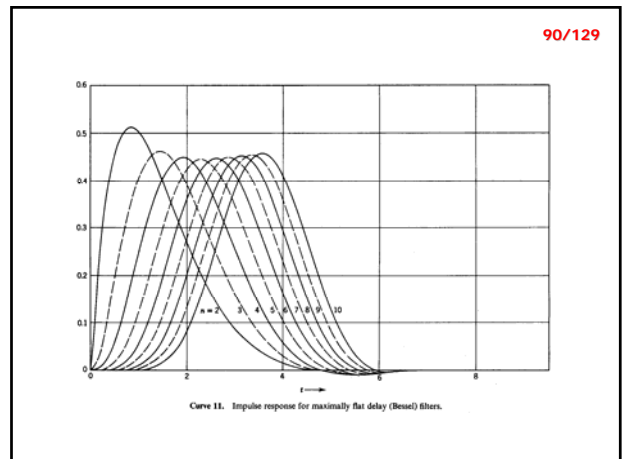
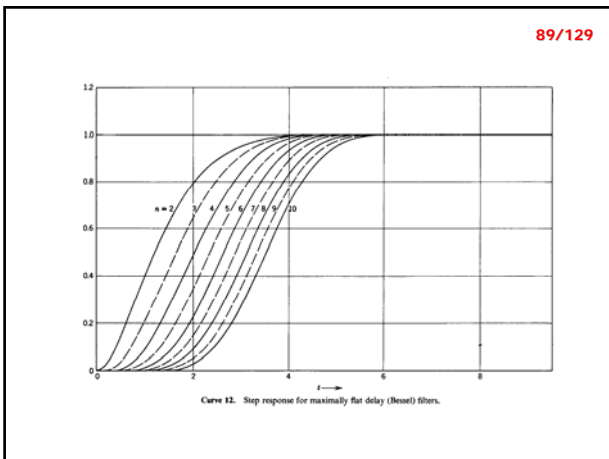
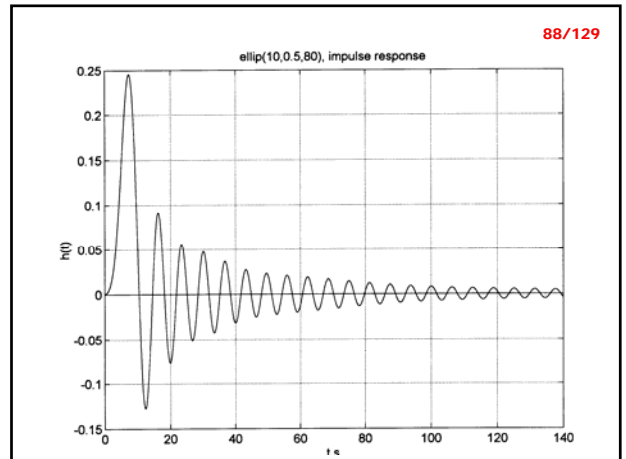
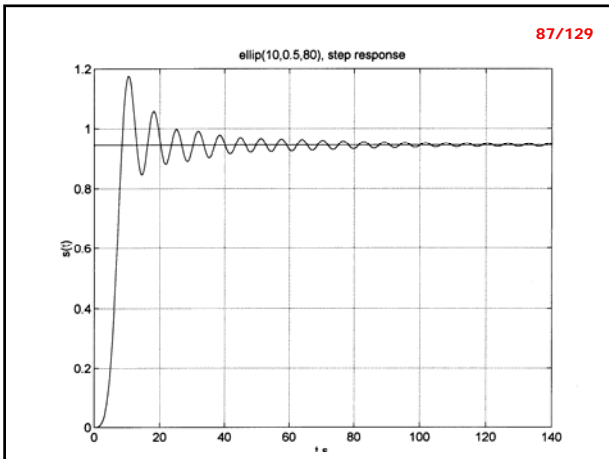
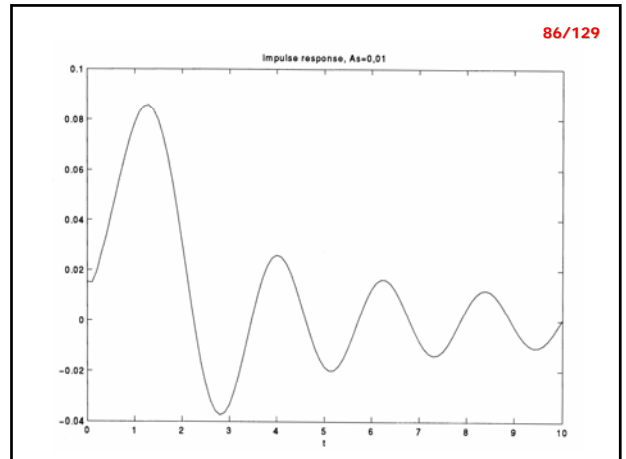
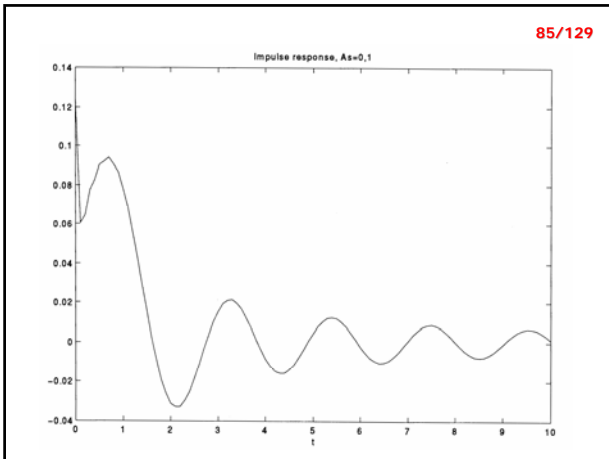
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln A(\omega)|}{1 + \omega^2} d\omega < \infty \quad (10-90)$$

We remark that if the amplitude of a function $H(\omega)$ satisfies (10-90), it does not follow that $H(\omega)$ has a causal inverse. The above says that to $|H(\omega)| = A(\omega)$ a suitable phase can be associated, so that the resulting function has a causal inverse. We further note that if $A(\omega)$ is not square-integrable, then (10-90) is neither necessary nor sufficient.

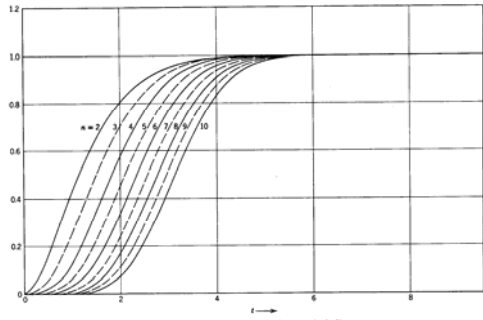
We shall attempt to give a simple justification of (10-90).

† Raymond E. A. C. Paley and Norbert Wiener, "Fourier Transforms in the Complex Domain," American Mathematical Society Colloquium Publication 19, New York, 1934.



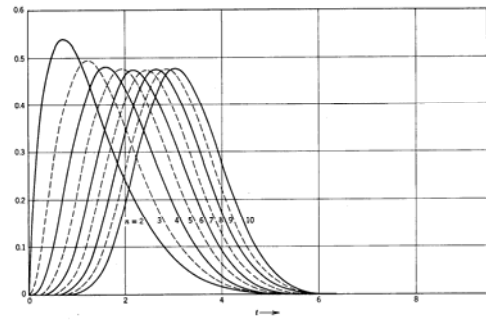


91/129



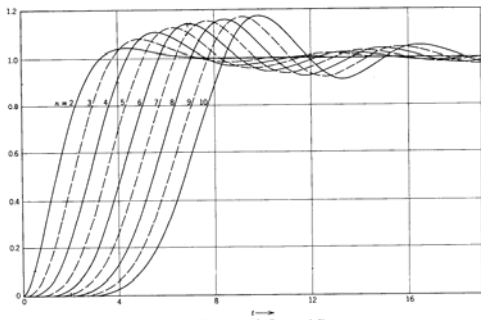
Curve 18. Step response for Gaussian magnitude filters.

92/129



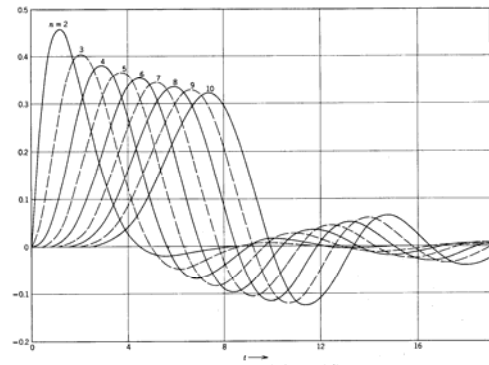
Curve 9. Impulse response for Gaussian magnitude filters.

93/129



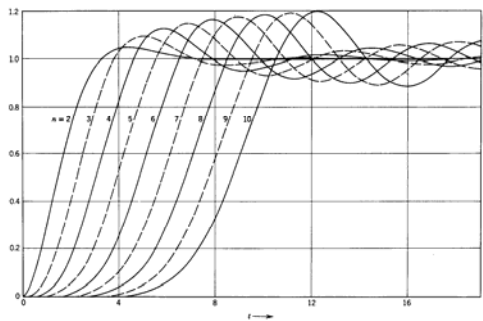
Curve 2. Step response for Butterworth filters.

94/129



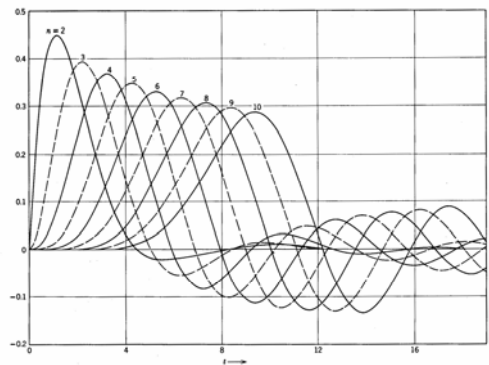
Curve 1. Impulse response for Butterworth filters.

95/129



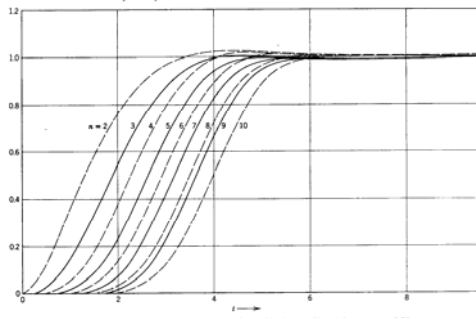
Curve 4. Step response for Chebyshev filters with 0.01 dB ripple.

96/129



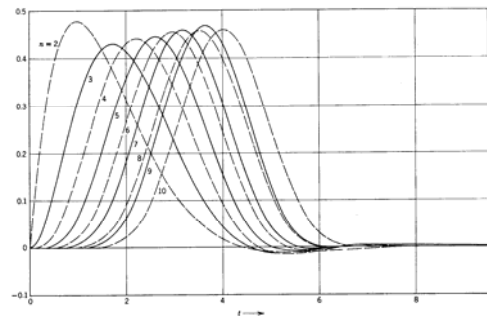
Curve 3. Impulse response for Chebyshev filters with 0.01 dB ripple.

97/129



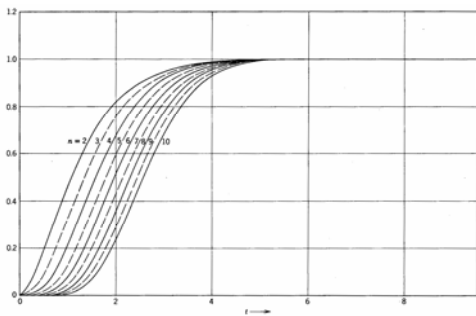
Curve 16. Step response for linear phase with equiripple error filters (phase error = 0.5°).

98/129



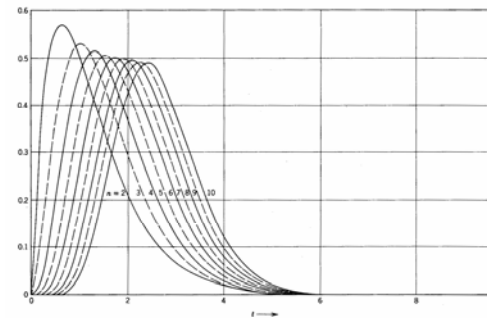
Curve 15. Impulse response for linear phase with equiripple error filters (phase error = 0.5°).

99/129



Curve 24. Step response for synchronously tuned filters.

100/129



Curve 23. Impulse response for synchronously tuned filters.

101/129

Vremenska diskretizacija tipkanjem kontinuiranog signala

- Postupak uzimanja uzoraka ili tipkanja kontinuiranog signala f možemo matematički modelirati kao pridruživanje funkciji f niza impulsa f^* , čiji intenzitet je proporcionalan trenutnim vrijednostima kontinuiranog signala.

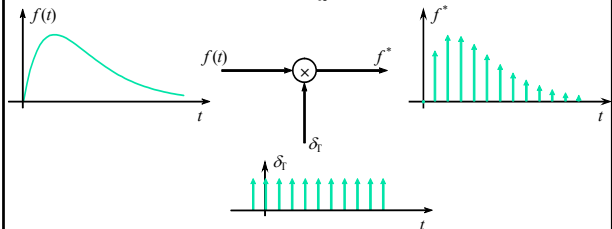
$$f^*(t) = S_T\{f(t)\}$$

- Možemo to interpretirati kao modulaciju impulsnog niza $\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)$ funkcijom f

102/129

Vremenska diskretizacija tipkanjem kontinuiranog signala

$$f^*(t) = f(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT)$$



Vremenska diskretizacija tipkanjem kontinuiranog signala

- Zbog svojstva delta funkcije da vadi vrijednost kontinuirane funkcije $f(t)$ na mjestu diskontinuiteta $t - kT = 0$, tj. $t_k = kT$, može se napisati i u obliku:

$$f^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT)\delta(t-kT).$$

Vremenska diskretizacija tipkanjem kontinuiranog signala

- Uvjete ekvivalencije kontinuiranog i diskretnog signala dobivenog postupkom otipkavanja najlakše je pratiti preko njihovih spektara.
- Neka signal f ima spektar:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt.$$

- Iz spektra F se može doći do same funkcije f inverznim Fourierovim integralom:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega.$$

Vremenska diskretizacija tipkanjem kontinuiranog signala

- Periodičan niz δ_T nastao ponavljanjem delta funkcije svakih T , kao svaka periodična funkcija se daje predstaviti Fourierovim redom, gdje su amplitude dane s:

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t)e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}.$$

- Odatle: $\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{jn\omega_0 t}$.

Vremenska diskretizacija tipkanjem kontinuiranog signala

- Spektar otipkanog signala f^* dan je s:

$$F^*(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{jn\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt.$$

- Zamjenom redosljeda sumacije i integracije dobivamo:

$$F^*(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j(\omega-n\omega_0)t} dt.$$

- Integral je spektar funkcije f , ali pomaknut za $n\omega_0$, pa izlazi:

$$F^*(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(\omega-n\omega_0).$$

Vremenska diskretizacija tipkanjem kontinuiranog signala

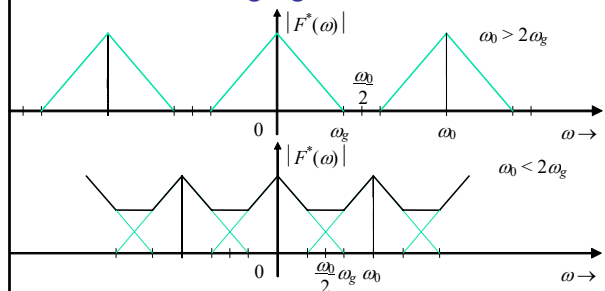
- Spektar F^* otipkanog signala f^* je periodično ponavljani spektar F kontinuiranog signala.
- Pretpostavimo da je spektar F frekvencijski ograničen

$$F(\omega) = 0 \text{ za } |\omega| > \omega_g.$$

- Različite frekvencije tipkanja signala $\omega_0 = 2\pi/T$ mogu u spektru $F^*(\omega)$ izazvati različite rezultate zavisno od toga da li je $\omega_0 - \omega_g > \omega_g$ ili $\omega_0 - \omega_g < \omega_g$ odnosno:

$$\omega_0 > 2\omega_g, \quad \omega_0 < 2\omega_g.$$

Vremenska diskretizacija tipkanjem kontinuiranog signala



Preklapanje sekcija spektra (engl. "aliasing").

Zaključak

- Diskretni se signal može smatrati ekvivalentnim kontinuiranom samo ako je moguće rekonstruirati izvorni signal f iz otipkanog f^* , odnosno ako se iz spektra F^* može dobiti originalni F . Postupak rekonstrukcije pretpostavlja izdvajanje osnovne sekcije spektra filtriranjem.
- To će biti moguće načiniti bez pogreške samo ako je spektar F ograničen na ω_g , te ako je frekvencija otipkavanja $\omega_0 > 2 \omega_g$.

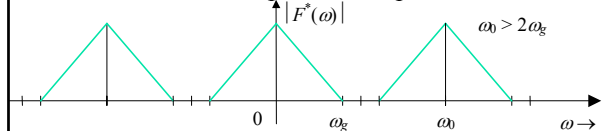
Obnavljanje ili rekonstrukcija kontinuiranog signala iz diskretnog

- Periodični spektar F^* može se dobiti i iz

$$f^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT)\delta(t-kT),$$

$$F^*(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT)\delta(t-kT)e^{-j\omega t} dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT)e^{-j\omega kT}.$$

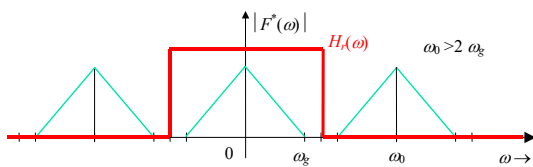
- U dobivenom izrazu se može prepoznati Fourierov red za periodični spektar F^* .



Obnavljanje ili rekonstrukcija kontinuiranog signala iz diskretnog

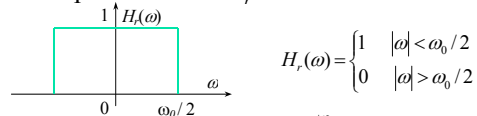
- Da bi se dobila osnovna sekcija spektra F_c odnosno po mogućnosti F , potrebno je izvršiti filtraciju F^* s filtrom frekvencijske karakteristike H_r ,

$$F_c(\omega) = F^*(\omega) H_r(\omega).$$



Obnavljanje ili rekonstrukcija kontinuiranog signala iz diskretnog

- Pretpostavimo za H_r idealan filter



$$H_r(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_0/2 \\ 0 & |\omega| > \omega_0/2 \end{cases}$$

- Impulсни odziv je $h_r(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0/2}^{+\omega_0/2} H_r(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{T} \frac{\sin \omega_0 t / 2}{\omega_0 t / 2}$.
- Neka je frekvencija otipkavanja $\omega_0 > 2 \omega_g$, tako da unutar pojasa ponavljanja $(-\omega_0/2, \omega_0/2)$, nema preklapanja sekcija spektra.
- Tada je: $F_c(\omega) H_r(\omega) = \frac{1}{T} F(\omega)$.

Obnavljanje ili rekonstrukcija kontinuiranog signala iz diskretnog

$$H_r(\omega) \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT) e^{-j\omega kT} \right) = \frac{1}{T} F(\omega).$$

- Inverznom Fourierovom transformacijom spektra F dobivamo:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H_r(\omega) \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT) e^{-j\omega kT} \right) e^{j\omega t} d\omega.$$

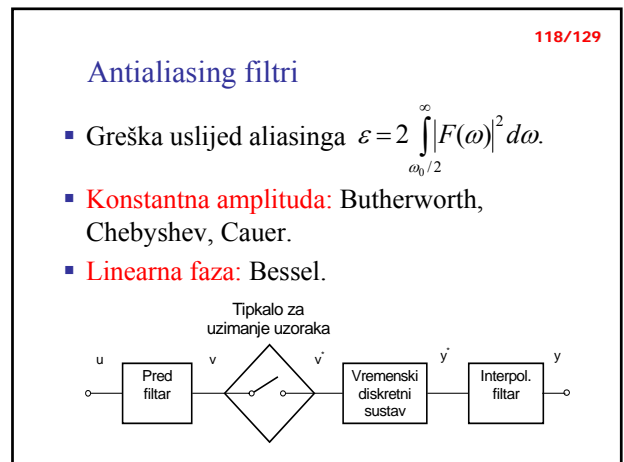
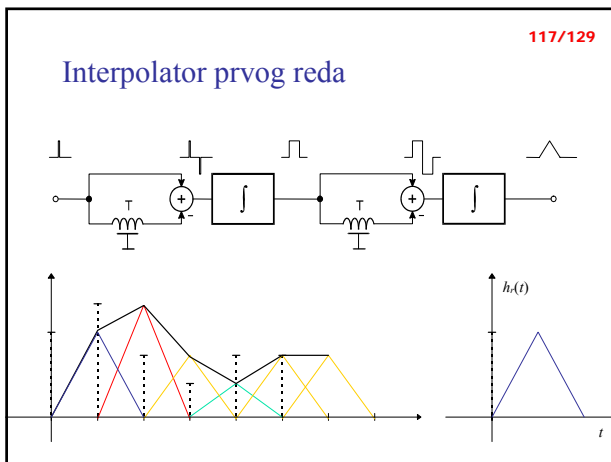
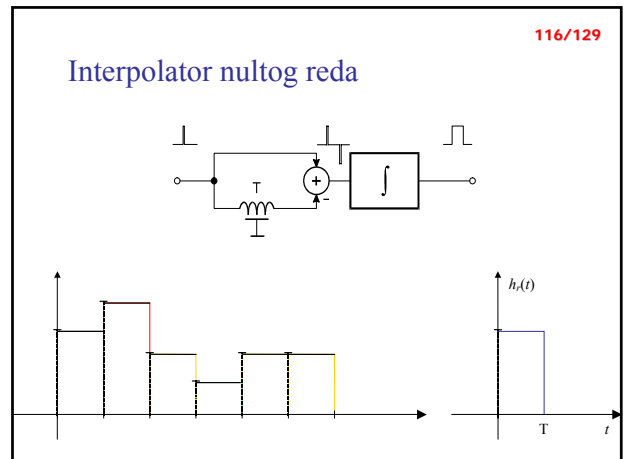
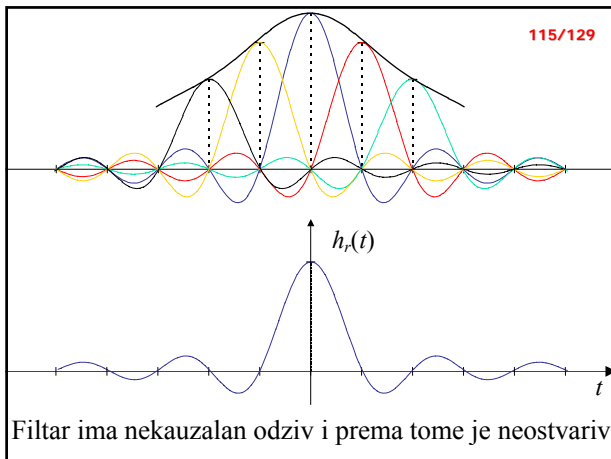
$$f(t) = \frac{T}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT) \int_{-\omega_0/2}^{+\omega_0/2} e^{j\omega(t-kT)} d\omega,$$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT) \frac{\sin \pi(t-kT)/T}{\pi(t-kT)/T}.$$

Obnavljanje ili rekonstrukcija kontinuiranog signala iz diskretnog

- Vidimo da je $f(t)$ dobiven iz uzoraka $f(kT)$ interpolacijom s funkcijom: $h_r(t) = \frac{\sin \pi t / T}{\pi t / T}$.
- Iz gornjega izvoda slijedi da je kontinuirana funkcija f , koja ima frekvencijski omeđen spektar ($F(\omega) = 0$ za $|\omega| > \omega_0/2$), jednoznačno određena svojim trenutnim vrijednostima u jednoliko raspoređenim trenucima $t_k = kT = 2\pi k / \omega_0$.

Interpolacijska funkcija predstavlja impulсни odziv idealnog filtra.



119/129

Diskretizacija spektra kontinuiranog signala

- Analognim pristupom može se provesti diskretizacija kontinuiranog spektra nekog signala $F_d(\omega) = \mathcal{S}_{\Omega}\{F(\omega)\}$,

$$F_d(\omega) = F(\omega) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n\Omega) \delta(\omega - n\Omega).$$

- Signal u vremenu f_d koji odgovara otipkanom spektru, dan je s

$$f_d(t) = \frac{1}{\Omega} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t + kt_0), \quad t_0 = \frac{2\pi}{\Omega}.$$

- Otiskavanje spektra daje f_d periodično ponavljaju funkciju f .

120/129

Diskretizacija spektra kontinuiranog signala

- Ako je funkcija f takva da je njeno trajanje $2t_g < t_0$ neće nastupiti preklapanje (aliasing) u vremenu.
- Izvorni signal moći će se dobiti pomoću vremenskog otvora množenjem f_d s idealnim vremenskim otvorom $f(t) = f_d(t) w(t)$

$$w(t) = \begin{cases} 1 & |t| < t_0/2 \\ 0 & |t| > t_0/2 \end{cases} \quad W(\omega) = t_0 \cdot \frac{\sin \omega t_0/2}{\omega t_0/2}.$$

- $F(\omega)$ se može jednoznačno dobiti iz svojih uzoraka $F(n\Omega)$, interpolacijom

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n\Omega) \frac{\sin \pi(\omega - n\Omega)/\Omega}{\pi(\omega - n\Omega)/\Omega}.$$

- Kontinuirani spektar signala konačnog trajanja ($f(t) = 0$ za $|t| > t_0/2$) jednoznačno je određen svojim uzorcima na frekvencijama $\omega_n = n\Omega$.

Dimenzionalnost signala

- Otipkavanje signala → ponavljanje spektra s $\Omega_p = \omega_0$. (aliasing u FD)
- Otipkavanje spektra → ponavljanje signala s $T_p = t_0$. (aliasing u VD)

$$\varepsilon_{FD} = \frac{2 \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega}{2 \int_0^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega} \quad \varepsilon_{VD} = \frac{2 \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt}{2 \int_0^{\infty} |f(t)|^2 dt}$$

relativna greška u FD

relativna greška u VD

- Greške se mogu ocijeniti poznavanjem brzine opadanja signala i spektra za $t > T_p / 2$ odnosno $\omega > \Omega_p / 2$.

Dimenzionalnost signala

- Uz specificiranu dozvoljenu grešku aliasinga u FD i VD dobivamo T_p i Ω_p – trajanje i širinu pojasa signala
 - potreban broj uzoraka u VD $N_T T = T_p = N_T \frac{2\pi}{\Omega_p}$ $N_T = \frac{T_p \Omega_p}{2\pi}$,
 - potreban broj uzoraka u FD $N_\Omega \Omega = \Omega_p = N_\Omega \frac{2\pi}{T_p}$ $N_\Omega = \frac{\Omega_p T_p}{2\pi}$,
 - dimenzija signala $N_T = N_\Omega = \frac{T_p \Omega_p}{2\pi} = T_p F_p$.
- Dimenzionalnost signala je važna u teoriji, a ima direktnu primjenu u diskretnoj Fourierovoj transformaciji.

Diskretna Fourierova transformacija

- DFT se koristi za numeričko određivanje spektra signala.
- Signal i njegov spektar treba predstaviti uzorcima odnosno otipkati.
- To s druge strane znači da će se otipkani signal i njegov otipkani spektar periodički produžiti.
- Uzmimo signal f i ponovimo ga periodički svakih T_p i predstavimo ga Fourierovim redom

$$\tilde{f}(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(t - mT_p) \quad \tilde{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\Omega t}, \quad \Omega = \frac{2\pi}{T_p}$$

Diskretna Fourierova transformacija

- Otipkavanje tog signala može se provesti nizom delta funkcija $\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$.

$$\tilde{f}(t)\delta_T(t) = \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\Omega t} \right) \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) \right)$$

$$\tilde{f}(kT)\delta(t - kT) = \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\Omega t} \right) \delta(t - kT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\Omega kT} \delta(t - kT)$$

- Odakle iz jednakosti $2\pi / T = N\Omega$ slijedi:

$$\tilde{f}(kT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{j \frac{2\pi kn}{N}}, k \in \mathbf{Z}$$

Diskretna Fourierova transformacija

- Budući da je eksponencijala periodična funkcija

$$e^{j \frac{2\pi(n+N)k}{N}} = e^{j \frac{2\pi nk}{N}},$$

moгу se skupiti komponente, koje množi ista eksponencijala.

$$(F_n + F_{n+N} + \dots + F_{n+IN} + \dots) e^{j \frac{2\pi nk}{N}} = \left(\sum_{l=-\infty}^{+\infty} F_{n+lN} \right) e^{j \frac{2\pi nk}{N}}$$

- Uvođenjem $\tilde{F}_n = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} F_{n+lN}$

$$\text{izlazi } \tilde{f}(kT) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{F}_n e^{j \frac{2\pi nk}{N}}, 0 \leq k \leq N-1.$$

- Beskonačna suma se može prikazati sumom od samo N različitih eksponencijala.

Diskretna Fourierova transformacija

- U \tilde{F}_n se nalaze zračljene amplitude svih komponenti izvan pojasa $\Omega_p = N\Omega$ i zbrajaju s onim unutar pojasa.
- \tilde{F}_n su dakle uzorci periodički produženog spektra (Ω_p) jednog periodički produženog signala (T_p).
- Odnos između uzoraka $\tilde{F}_n = \tilde{F}(n)$ $\tilde{f}(kT) = \tilde{f}(k)$ u potpunosti je određen tzv. diskretnom Fourierovom transformacijom (DFT).

$$\tilde{f}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{F}(n) e^{j \frac{2\pi nk}{N}}, 0 \leq k \leq N-1$$
- Potrebni broj uzoraka N u bilo kojoj od domena je dan dimenzionalnošću signala.

Diskretna Fourierova transformacija

- Uzorci spektra $\tilde{F}(n)$ slijede također iz sumacije, koju možemo dobiti ako izvorni izraz pomnožimo s $e^{-j2\pi kr/N}$ i sumiramo preko N vremenskih uzoraka

$$\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{f}(k) e^{-j\frac{2\pi kr}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{F}(n) e^{j\frac{2\pi k(n-r)}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{F}(n) \sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(n-r)k}$$

- Suma eksponencijala po k daje za $n = r + mN$ iznos N a inače 0, kako se može zaključiti iz izraza za sumu geometrijskog reda

$$\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{f}(k) e^{-j\frac{2\pi kr}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{F}(n) N \delta(n-r-mN) = N\tilde{F}(r).$$

Diskretna Fourierova transformacija

- Može se napisati konačno DFT par

$$\tilde{F}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{f}(k) e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}, 0 \leq n \leq N-1,$$

$$\tilde{f}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{F}(n) e^{j\frac{2\pi nk}{N}}, 0 \leq k \leq N-1.$$

- Koeficijent $1/N$ se nekada pridružuje drugoj sumaciji koja se naziva inverznom DFT. Izrazi daju jednoznačnu vezu između nizova $\{\tilde{f}(k)\}$ i $\{\tilde{F}(n)\}$ periodičnih s periodom N .

Diskretna Fourierova transformacija

- DFT je numerički postupak.
- Koliko točno postupak predstavlja Fourierovu transformaciju izvornog kontinuiranog signala f u spektar F , zavisi kako je pokazano ranije od izabranog T_p i Ω_p , te brzine opadanja signala i spektra za $t > T_p/2$ i $\omega > \Omega_p/2$.